UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIRIQUÍ

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

COMISION DE PREINGRESO

GUIA PARA EL REFORZAMIENTO DE MATEMÁTICA

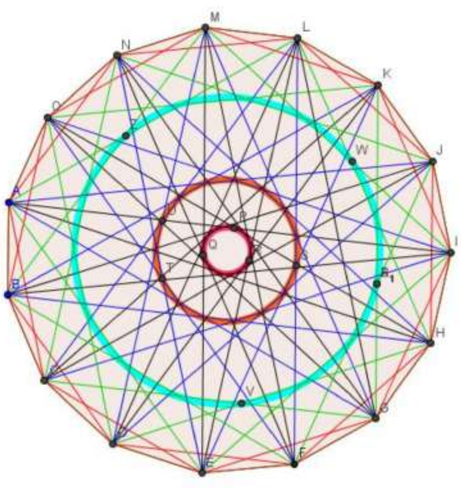
REVISIÓN:

PROFESORES: ALBIN MORENO Y AMÍLCAR ABDIEL AVILÉS

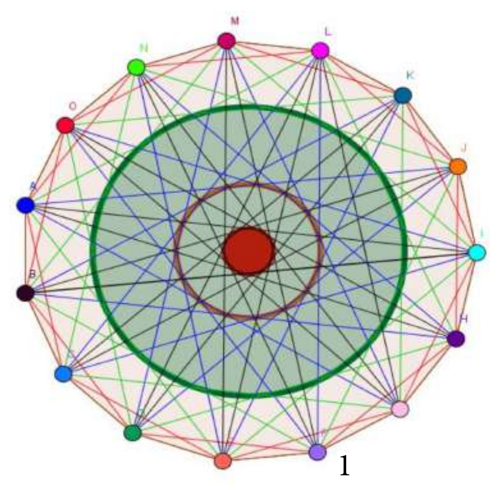
EDICIÓN:

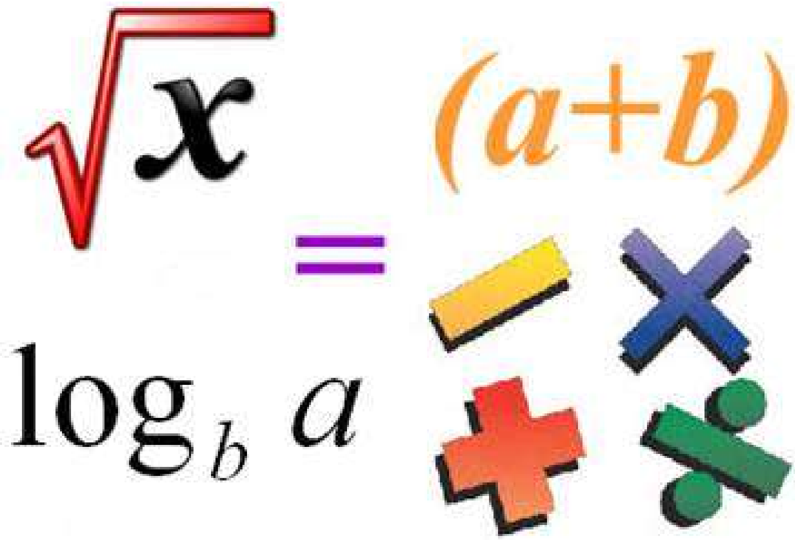
PROFESOR: AMÍLCAR ABDIEL AVILÉS

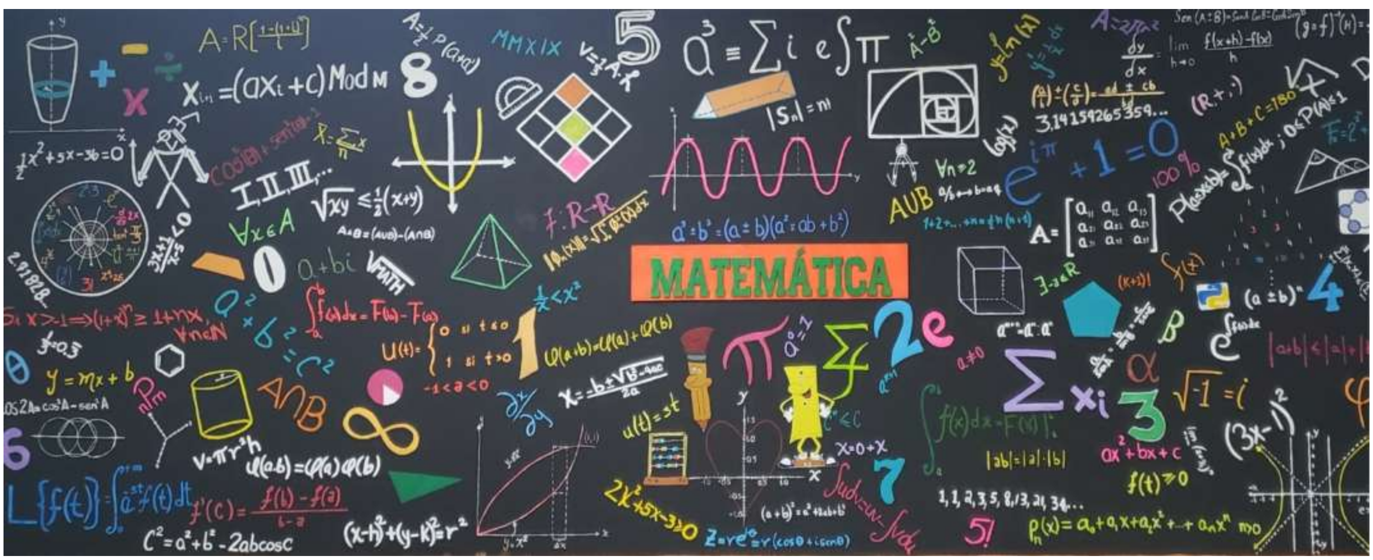
2020

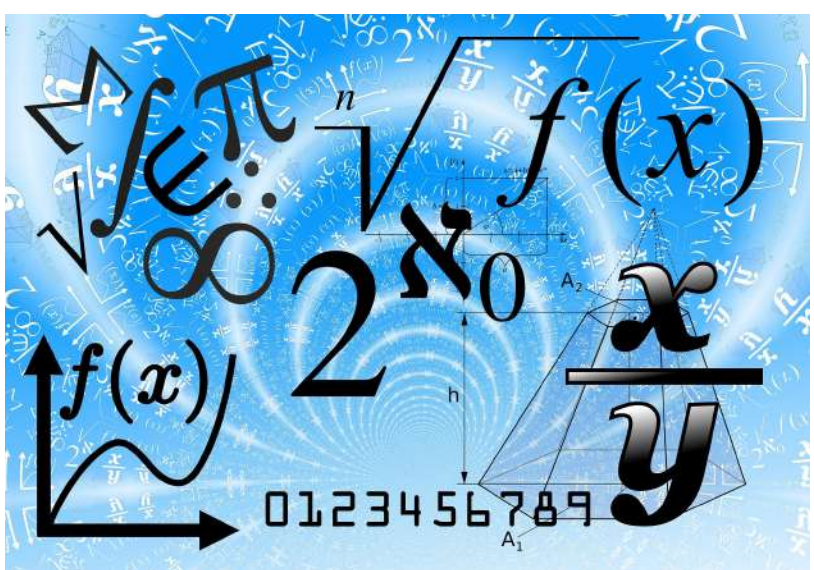


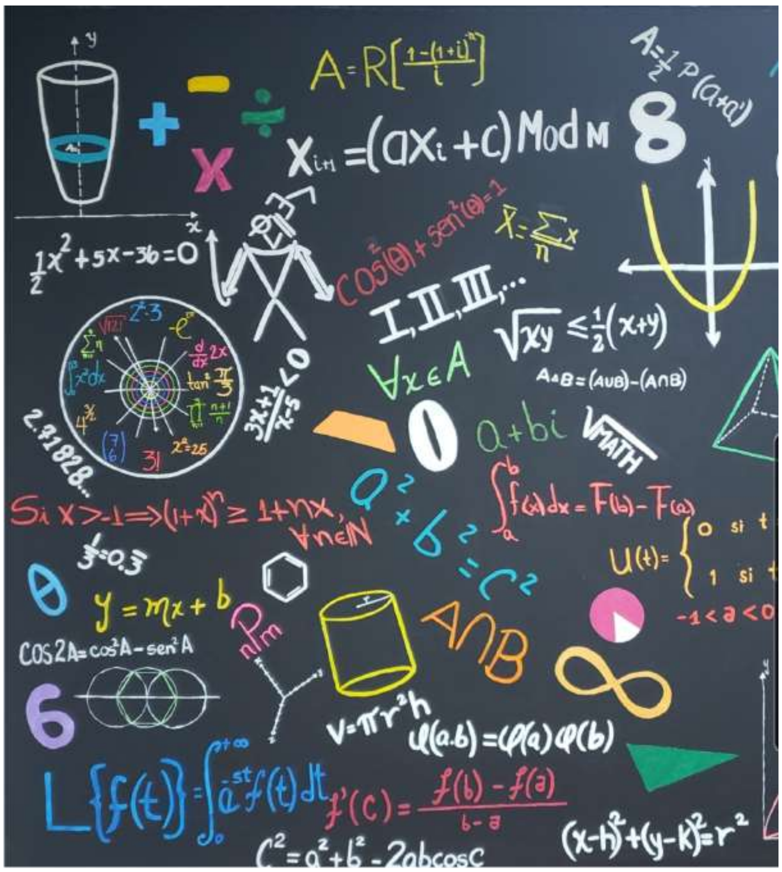
$\sum \; e \; \int \; \equiv$






MATEMÁTICA





PRESENTACIÓN

Este material de estudio está dirigido a los estudiantes que desean ingresar a alguna de las carreras que ofrece la Facultad de Ciencias Naturales y Exactas, Enfermería o Medicina. Se tratan de una manera sencilla, temas básicos de Álgebra y de Geometría Analítica. Se estudian los conceptos básicos sobre Funciones Exponenciales, Funciones Logarítmicas y Funciones Trigonométricas. El conocimiento de estos temas es fundamental para el desarrollo adecuado de cursos posteriores de Cálculo.

Todas las carreras que ofrece la Facultad de Ciencias Naturales y Exactas contemplan en su Plan de Estudio uno o más cursos de Cálculo y por esto se requiere de una preparación adecuada de las nociones matemáticas en que éste se basa.

La importancia de los conceptos que presentamos se ilustran con ejemplos y al final de cada módulo se propone una serie de ejercicios que ayudarán al estudiante a dominar las técnicas para su solución.

Esperamos que los estudiantes se sientan comprometidos con el logro del conocimiento de los temas que les presentamos.

Sección de Matemática

Índice

SECCIÓN DE ARITMÉTICA

UNIDAD 0.

RAZONES, PROPORCIONES Y TANTO POR CIENTO

0.1. RAZÓN

Objetivos Específicos

- Definir razón.
- Distinguir los tipos de razón.
- Establecer la notación para razón geométrica.
- Definir razón geométrica.
- Identificar los términos de una razón
- Enunciar las propiedades de las razones geométricas.
- Resolver problemas de aplicación referentes a razón geométrica.

Razón

La *razón* es el resultado de comparar dos cantidades de la misma especie; o, simplemente la comparación entre dos números similares. La razón es un método muy útil de comparación.

Las cantidades en una razón se pueden comparar de dos formas:

- Determinando en cuánto excede una a la otra; es decir, restándolas.
- Determinando cuántas veces contiene una a la otra; es decir, dividiéndolas.

Entonces, existen dos tipos de razones: la *aritmética* o por diferencia y la *geométrica* o por cociente. En lo que sigue de esta unidad, trabajaremos con razones geométricas.

Razón geométrica

La *razón geométrica* de dos cantidades es el cociente indicado de sus valores.

Toda razón geométrica se puede escribir en las formas siguientes:
Como una división: $a \div b$
Con dos puntos o signo de razón:
$a : b$
Como una fracción:

ab ó $\frac{a}{b}$

Ejemplos

- La razón de 3 a 5 se puede expresar como $3/5$ ó $3 \div 5$ ó $3 : 5$.
- Si una clase en la universidad tiene un total de 40 estudiantes, de los cuales, 15 son mujeres y 25 son hombres, entonces
  a) La razón de mujeres a hombres es de 15 a 25, que también se puede expresar como 15:25 ó $\frac{15}{25}$. Esta razón se puede reducir a $\frac{3}{5}$ y se puede interpretar así:
     - Existen tres mujeres por cada cinco hombres en la clase, o
     - En la clase hay tres quintas partes de mujeres en comparación a los hombres.
  b) La razón de hombres al total de estudiantes es $\frac{25}{40}$. Esta razón

se puede reducir a $\frac{5}{8}$ y esto indicaría que:

- Cinco octavas partes de la clase son hombres, o
- De cada 8 estudiantes, 5 son hombres.

Nótese que, el número al que se le hace la comparación es siempre el denominador de la fracción y, como la razón expresada en esta forma, es una fracción, se puede utilizar como fracción en los cálculos. Además, al igual que en cualquier otra fracción, la razón puede ser menor que, igual a, o mayor que 1.

Ejemplo

Considerando el ejemplo anterior, si en una segunda clase hay 55 estudiantes, incluyendo 15 mujeres. Entonces,

- La razón de mujeres en la primera clase a mujeres en la segunda clase es de $\frac{15}{15}$, o sea 1.
- La razón del número de estudiantes en la segunda clase al número de estudiantes en la primera clase es de $\frac{55}{40}$, o sea $\frac{11}{8}$, que es más de 1.

Términos de una razón

En una razón, el primer término se denomina *antecedente* y el segundo término *consecuente*.

Ejemplo

En la razón 3:5; el antecedente es 3 y el consecuente es 5.

Propiedades de las razones geométricas

Como las razones geométricas se pueden considerar como una fracción, entonces éstas satisfacen las siguientes propiedades de las fracciones:

- Si el antecedente de una razón se multiplica o divide por un número diferente de cero, ella queda multiplicada o dividida por ese mismo número.
- Si el consecuente de una razón se multiplica o divide por un número diferente de cero, la razón queda dividida en el primer caso y multiplicada en el segundo, por el mismo número.
- Si el antecedente o el consecuente de una razón se multiplican o dividen por un mismo número, la razón no varía.

Problemas de aplicación

1. **Problemas generales**

   Para encontrar la razón entre dos cantidades, se escribe la razón en forma de fracción y se simplifica, si es posible, hasta reducirla a su mínima expresión.

Ejemplos

- La razón de 56 y 7 es igual a la razón de 8:1; ya que, se considera el cociente de ambos números y luego se procede a reducirlo a su mínima expresión. O sea, dividiendo ambos términos por 7, se obtiene $\frac{56}{7}=\frac{8}{1}$.

- Para reducir la razón $\frac{2}{3}:\frac{4}{9}$ a su mínima expresión, se considera la razón dada como una fracción, o sea $\frac{2}{3}:\frac{4}{9}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}\times\frac{9}{4}=\frac{3}{2}$ Luego, la razón $\frac{2}{3}:\frac{4}{9}$ es igual a 3:2.

- Para encontrar la razón de las edades de dos niños de 10 meses y 2 años, primero se transforman los dos años a meses, o sea 2 años equivalen a 24 meses, y luego se considera el cociente de 10 meses y 24 meses, y se simplifican las cantidades similares; es decir, $\frac{10 \text{ meses}}{2 \text{ años}}=\frac{10 \text{ meses}}{24 \text{ meses}}=\frac{5}{12}$

  Luego la razón de 10 meses y dos años es 5:12.

ACTIVIDAD 1

Escriba las siguientes razones como fracciones y redúzcalas a los términos mínimos.

1. Hallar la razón de:

a. 50 pies a 90 pies	c. 10 yardas a 8 pies.
b. 12 minutos a 2 horas.	d. 45 monedas de 10 centavos a 5 dólares.

2. Hallar la razón de:

a. 60 y 12.	c. 5.6 y 3.5
b. $\frac{12}{11}$ y $\frac{6}{5}$	d. $\frac{3}{8}$ y 0.02

3. Un estudiante realiza 13 exámenes durante el semestre y aprobó 9.
   a. ¿Cuál es la razón de exámenes aprobados en comparación con los exámenes realizados?
   b. ¿Cuál es la razón de exámenes reprobados en comparación con los aprobados?

4. Una familia tiene un ingreso semanal por concepto de sueldo de B/.320.00. Se gastan B/.80.00 a la semana en comida, B/.25.00 a la semana en gasolina y B/.90.00 a la semana en alquiler de la casa.
   a. ¿Cuál es la razón de gastos por alimentación en comparación a los gastos por gasolina?
   b. ¿Cuál es la razón del importe gastado en alquiler en comparación con los gastos por alimentos?
   c. ¿Cuál es la razón de gastos de gasolina al sueldo neto recibido?

5. Durante el período de ventas de mediados de agosto de 1983, los tres grandes fabricantes de automóviles en Estados Unidos (General Motors-GM, Ford y Chrysler) vendieron 153000 automóviles nuevos. De éstos, las ventas de GM fueron 97000.
   a. ¿Cuál es la razón de las ventas de GM en comparación con el total de venta de automóviles nuevos?
   b. ¿Cuál es la razón del número de los automóviles de GM vendidos en comparación con el número de automóviles vendidos por los demás fabricantes de automóviles estadounidenses?

6. En junio de 1983 existían 102.5 millones de personas empleadas en Estados Unidos y 11.1 millones desempleados.
   a. ¿Cuál es la razón de trabajadores desempleados en comparación con la fuerza laboral total?
   b. Redonde la respuesta de la parte a) e interprétela.
   c. ¿Cuál es la razón de personas empleadas a personas desempleadas?

7. Una tienda minorista compró una lámpara en B/.25.00 y la vendió a B/.40.00. La ganancia bruta (la diferencia entre el costo y el precio de venta) fue B/.15.00. Determinar e interpretar las siguientes razones que pueden ser de utilidad para la tienda:
   a. Costo a precio de venta.
   b. Ganancia bruta a precio de venta.
   c. Ganancia bruta al costo.

B. Problemas de repartimiento proporcional

Los problemas de repartimiento proporcional son aquellos problemas en los cuales hay que "*obtener una cantidad de acuerdo con una razón dada*". Para resolver este tipo de problemas se deben realizar los siguientes pasos:

- Se suman los términos de la razón.
- Se forman las fracciones con cada término de la razón, dividido entre la suma de ellos.
- Se multiplican estas fracciones por la cantidad a repartir.

Ejemplos

- Entre tres comerciantes A, B y C se deben distribuir 1600 kilos de café a razón de 8:11:13. ¿Cuántos kilos recibirá cada comerciante?

  Solución

  - Se suman los términos de la razón, o sea 8 + 11 + 13 = 32.
  - Se forman las fracciones correspondientes a cada término de la razón dada respecto a la suma de ellos; o sea, $\frac{8}{32}, \frac{11}{32}$ y $\frac{13}{32}$.
  - Finalmente, se multiplican estas fracciones por la cantidad a dividir

    ;

    y

$\frac{8}{32}(1600)=400 \quad \frac{11}{32}(1600)=550$

$\frac{13}{32}(1600)=650$

Luego, el comerciante A recibirá 400 kilos de café, el comerciante B recibirá 550 kilos de café y el comerciante C recibirá 650 kilos de café. Para comprobar los resultados obtenidos, se consideran los cocientes de éstos y se verifica si están en la razón dada originalmente; esto es,

$\frac{400}{550}=\frac{8}{11}$, o lo mismo, 8:11

$\frac{400}{650}=\frac{8}{13}$, o lo mismo, 8:13

$\frac{550}{650}=\frac{11}{13}$, o lo mismo, 11:13

- Entre dos comerciantes X, Y compraron 720 refrigeradoras en una razón 4:5. ¿Cuántas refrigeradoras compró cada uno?

  Solución:

  - La suma de los términos de la razón es igual a 4 + 5 = 9.
  - Las fracciones correspondientes a los términos de la razón respecto a la suma de éstos son $\frac{4}{9}$ y $\frac{5}{9}$.
  - Al multiplicar cada fracción por el total a repartir, se obtiene que

$\frac{4}{9}(720)=320$ y $\frac{5}{9}(720)=400$.

Luego, al comerciante X le corresponden 320 refrigeradoras y al comerciante Y, 400 refrigeradoras.

ACTIVIDAD 2

Resuelva los siguientes problemas:

1. Dos almacenes B, C deben repartirse 120 camas en la razón 2:3. ¿Cuántas camas le corresponden a cada uno?
2. Se deben distribuir B/.200,000.00 de herencia entre tres herederos, Pedro, Juan y José, en la razón 5:14:21.
   a. ¿Cuánto recibirá cada heredero?
   b. ¿Qué diferencia hay entre la parte mayor y la parte menor que se distribuye?
3. Una aleación contiene tres metales A, B, C en la razón 1:4:6. Encontrar la cantidad de cada metal en 99 Kg de aleación.
4. Una fábrica tiene 108 empleados y están distribuidos en 4 secciones A, B, C, D en la razón 1:3:5:9. ¿Cuántos empleados tiene cada sección?
5. En una casa existe una entrada mensual de B/.680.00, aportados por el padre y la madre en la razón 3:2. ¿Cuánto aporta cada uno?
6. Una compañía obtuvo de ganancia anual B/.1,800.00 y ésta se repartió entre los socios A, B y C en la razón 4:6:14.¿Qué cantidad de dinero le correspondió a cada socio?
7. Entre los niños de tres ciudades X, Y, Z se distribuirán 600 pares de calzados, en una razón de 7:11:12. ¿Cuántos pares de calzados le corresponden a cada ciudad?

1. PROPORCIÓN

Objetivos Específicos

- Definir proporción.
- Establecer la notación para proporciones.
- Identificar los elementos de una proporción.
- Enunciar la propiedad fundamental de las proporciones al determinar algún término desconocido de las mismas.
- Identificar los tipos de proporciones.
- Resolver problemas de aplicación de las proporciones, según el tipo correspondiente.

Proporción

Una *proporción* es la igualdad entre dos razones.

Las proporciones se pueden escribir de dos formas diferentes:

- Como la igualdad de dos fracciones: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$
- Con el signo de proporción (cuatro puntos ::): a:b::c:d, que se leerá: "*a* es a *b* como *c* es a *d*".

Ejemplos

1. **La proporción $\frac{8}{4}=\frac{24}{12}$, también se puede escribir como 8:4 :: 24:12.**

- La proporción $\frac{2.4}{0.04}=\frac{24}{0.4}$, se puede escribir como 2.4: 0.04 :: 24:0.4.

A los elementos de una proporción se les llama *términos*. El primer y cuarto término reciben el nombre de *extremos* y, el segundo y tercer término se conocen como *medios*.

Ejemplos

- En la proporción $\frac{5}{6}=\frac{15}{18}$; los términos de ésta son: 5, 6, 15 y 18; los medios son: 6 y 15, y los extremos son: 5 y 18.
- En la proporción 2:10::6:30, los extremos son: 2 y 30, y los medios son: 10 y 6.

Propiedad fundamental de las proporciones

La propiedad fundamental de las proporciones nos dice "en toda proporción el producto de los medios es igual al producto de los extremo". En general, para la proporción *a*:*b*::*c*:*d*, según esta propiedad, se tiene que *a* x *b* = *c* x *d*.

Ejemplo

En la proporción 3:4::6:8, según la propiedad fundamental, se tiene que

$$4 \times 6 = 3 \times 8 \quad \text{-->} \quad 24 = 24$$

Propiedad de los extremos y de los medios

De la propiedad fundamental de las proporciones se derivan las dos propiedades siguientes:

- En toda proporción, un *extremo*

es igual al producto de los medios dividido por el otro extremo. Así, de la expresión general *a*:*b*::*c*:*d* se obtiene que los extremos a y d están dados, respectivamente, por

$a = \frac{bxc}{d}$ y $d = \frac{bxc}{a}$

- En toda proporción, un *medio* es igual al producto de los extremos dividido por el otro medio. Así, de la expresión general *a*:*b*::*c*:*d* se obtiene que los medios b y c están dados, respectivamente, por $b = \frac{axd}{c}$ y $c = \frac{axd}{b}$.

ACTIVIDAD 3

Encuentre el término desconocido en las siguientes proporciones:

1. 2 : 3 :: 4 : *x*	2. 20 : 10 :: *x* : 6
3. 2 : x :: 8 : 24	4. x : 25 :: 10 : 2
5. 0.04 : 0.05 :: 0.06 : x	6. 2 : 4 :: 5 : x
7. $\frac{1}{3}:\frac{1}{5}::x:\frac{2}{3}$	8. $5:\frac{1}{2}::x:0.04$
9. $0.03:x::\frac{1}{6}:\frac{2}{9}$	10. $x:\frac{1}{5}::6:2$

Tipos de proporciones

Existen dos tipos de proporciones, la *directa* y la *inversa*.

La *proporción directa* es aquella en la cual dos valores están relacionados de tal manera que, el aumento o disminución en uno, causa el aumento o disminución correspondiente en el otro.

Ejemplo

Las siguientes magnitudes (valores variables) están directamente relacionadas, o sea en proporción directa:

- A mayor velocidad, mayor la distancia recorrida.
- A mayor cantidad de hombres trabajando, mayor cantidad de trabajo realizado.
- A menor cantidad de artículos comprados, menor costo.

La *proporción inversa* es aquella en la cual dos valores están relacionados de tal manera que, el aumento en una, motiva un decrecimiento correspondiente en el otro, y viceversa.

Ejemplo

Las siguientes magnitudes (valores variables) están inversamente relacionadas, o sea en proporción inversa:

- A mayor velocidad, menor tiempo.
- A menor cantidad de hombres en un trabajo, mayor el tiempo empleado en hacerlo.
- A mayor oferta, menores precios.

Problemas de aplicación

El método para resolver problemas de aplicación referentes a proporciones, consta de los siguientes pasos:

a) Escribe dos columnas, cada una de ellas con los valores correspondientes o de la misma clase.

b) Forma razones con los valores de cada columna.

c) Forma y resuelve la proporción, atendiendo a:

- Si la proporción es directa, ella se obtiene igualando las dos razones.
- Si la proporción es inversa, ésta se forma igualando una razón con la inversa de la otra.

Ejemplos

- Una persona que debe B/.1500.00, conviene con sus acreedores en pagar B/.0.75 por cada dólar adeudado. ¿Cuánto tiene que pagar?

Solución

a) Las dos columnas son:

Cantidad adeudada (B/.)	Cantidad pagada (B/.)
1.0	0.75
1,500.00	

b) Las dos razones son:

$\frac{1}{1500}$; $\frac{0.75}{x}$

c) La proporción es $\frac{1}{1500}=\frac{0.75}{x}$, que es directa; por lo que, aplicando la propiedad fundamental, se obtiene

$$x=\frac{(1500)(0.75)}{1}=1125$$

Luego, la persona tiene que pagar B/.1125.00.

- Una cuadrilla de obreros emplea 14 días, trabajando 8 horas diarias, en realizar cierta obra. Si hubieran trabajado una hora menos al día, ¿En cuántos días habrían terminado la obra?

Solución

Las dos columnas son:

Días	Horas
14	8
x	7

a) Las dos razones son: $\frac{14}{x}$; $\frac{8}{7}$

b) Como la proporción es inversa (menos horas de trabajo implica utilizar más obreros), entonces se invierte una de las dos razones y se obtiene la proporción $\frac{14}{x}=\frac{7}{8}$. Ahora, aplicando la propiedad fundamental ésta se resuelve y se encuentra que

$$=\frac{(\overbrace{\cancel{14}}^{2})(8)}{\underbrace{\cancel{7}}_{1}}=16$$

Luego, si se hubiera trabajado una hora menos al día, la obra se habría terminado en 16 días.

ACTIVIDAD 4

Resuelve los siguientes problemas:

1. Si 4 libros cuestan B/.20.00, ¿cuánto costarán 5 docenas de libros?.
2. Ganando B/.3.15 en cada metro de tela vendido, ¿cuántos metros se han vendido, si la ganancia ha sido B/.945.00?
3. Una guarnición de 1 300 hombres tiene víveres para cuatro meses. Si se quiere que los víveres duren 10 días más, ¿cuántos hombres habrá que retirar de la guarnición?
4. A la velocidad de 30 Km/h un automóvil emplea $8\frac{1}{4}$ horas en efectuar un recorrido. ¿Cuánto tiempo menos hubiera tardado si la velocidad hubiera sido el triple.?
5. Si 9 hombres pueden hacer una obra en 5 días
   - ¿Cuántos hombres más harán falta para hacer la obra en un día.?
   - ¿Cuántos hombres menos harán falta para hacerla en 15 días.?
6. Dos individuos alquilan una finca. El primero ocupa los $\frac{5}{11}$ de la finca y paga por el alquiler B/.6 000.00 al año. ¿Cuánto paga de alquiler anual el segundo?

1.3. TANTO POR CIENTO

Objetivos Específicos

- Definir porcentaje.
- Transformar un porcentaje (%) a fracción común.
- Transformar un porcentaje (%) a fracción decimal.
- Transformar un número a porcentaje (%)
- Resolver problemas de aplicación de porcentaje según el caso respectivo.

Porcentaje

Se denomina *tanto por ciento*, o simplemente *porcentaje* de un número, a una o varias de las cien partes iguales en que se puede dividir el número; es decir, uno o varios centésimos de un número.

Para denotar el tanto por ciento de un número, al número correspondiente se le agrega el símbolo %. El equivalente aritmético del símbolo % es $\frac{1}{100}$ ó 0.01, o sea, $\% = \frac{1}{100} = 0.01$.

Obsérvese que, aunque el signo de porcentaje (%) es conveniente y se utiliza comúnmente en la escritura, éste no es utilizado en los cálculos. Èste, tiene un valor aritmético definido antes de comenzar a realizar cualquier cálculo, o sea, que la cantidad presentada como porcentaje, se tiene que cambiar a una fracción común equivalente o a su decimal respectivo. Es decir, con esto se cambia la forma, pero no el valor de la expresión.

Ejemplo

Ochenta por ciento, se escribe 80%; pero, a su vez, $80\% = 80\left(\frac{1}{100}\right) = 0.8$

Transformación de un porcentaje % a fracción común

Para transformar un porcentaje a fracción común, se elimina el signo de porcentaje (%), se multiplica el número por $\frac{1}{100}$ y se simplifica, si es posible.

Ejemplos

$25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$; $75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$;

$\frac{1}{2}\% = \frac{\frac{1}{2}}{100} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{100} = \frac{1}{200}$

ACTIVIDAD 5

Transforme los siguientes porcentajes a fracción común y exprese la respuesta en la forma más simple:

1. 14%	5. 0.81%	9. 1%
2. $12\frac{1}{2}$ %	6. 99.44%	10. $\frac{2}{5}$ %
3. $\frac{5}{8}$ %	7. 7.01%	11. 500%
4. 134%	8. 75%	12. 0.05%

Transformación de un porcentaje (%) a fracción decimal

Para transformar un porcentaje a fracción decimal, se elimina el símbolo de % y se divide la cantidad entre 100, o lo mismo, se desplaza el punto decimal dos lugares hacia la izquierda y se elimina el símbolo de porcentaje (%).

Ejemplos

$15\% = \frac{15}{100} = 0.15$; $8.5\% = \frac{8.5}{100} = 0.085$;

$6\frac{3}{4}\% = \frac{6.75}{100} = 0.0675$

ACTIVIDAD 6

Transforme los siguientes porcentajes a fracción decimal:

1. 25%	5. 0.381%	9. 1%
2. $15\frac{1}{2}$ %	6. 65.8%	10. $\frac{2}{5}$ %
3. $3\frac{5}{8}$ %	7. 7.05%	11. 200%
4. 120%	8. 45%	12. 0.084%

Transformación de un número a porcentaje (%)

Para transformar un número a porcentaje, éste se multiplica por 100 y se le agrega el símbolo %.

Ejemplos

0.28 = 0.28 x 100% = 28%
0.0525 = 0.0525 x 100%

0.01 = 0.01 x 100% = 1%

$\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ x 100% = 25%

ACTIVIDAD 7

Transforme los siguientes números a porcentajes:

1. 12	5. 1.85	9. 1
2. 1.3	6. 6.77	10. $\frac{18}{25}$
3. 0.093	7. 0.024	11. $\frac{1}{8}$
4. $\frac{1}{2}$	8. $\frac{4}{5}$	12. 0.00998

Problemas de aplicación

A. Casos particulares

Generalmente, los problemas de aplicación de tanto por ciento se dividen en tres tipos:

Hallar el tanto por ciento de un número dado.

Ejemplos

- Hallar el 15% de 720.

  Solución

  Con los valores dados, se forma y se resuelve la proporción directa siguiente:

Número	%
720	100
X	15

Entonces, $x = \frac{720(15)}{100} = 108$. Luego, el 15% de 720 es 108.

Hallar el $\frac{3}{5}$%de 54.

Solución

Con los valores dados, se forma y se resuelve la proporción directa siguiente:

Número	%
54	100
x	$\frac{3}{5}$

Entonces, $x = \dfrac{54\ (\frac{3}{5})}{100} = \dfrac{81}{250}$ Luego, el $\frac{3}{5}$% de 54 es $\frac{81}{250}$.

- **Hallar un número cuando se conoce un tanto por ciento de él.**

Ejemplos

- De qué número es 9 el 4%?

  Con los valores dados, se forma y se resuelve la proporción directa siguiente:

Número	%
x	100
9	4

Entonces, $x = \dfrac{9(100)}{4} = 225$

Luego, 9 es el 4% de 225.

- De qué número es 16 el $\frac{1}{4}$%

Solución

Con los valores dados, se forma y se resuelve la proporción directa siguiente:

Número	%
x	100
16	$\frac{1}{4}$

Entonces, $x = \dfrac{16\ (100)}{\frac{1}{4}} = 6400$. Luego, 16 es el $\frac{1}{4}$ de 6400.

- Dados dos números, calcular qué tanto por ciento es uno del otro.

Ejemplos

- Qué porcentaje (%) de 860 es 129?

Con los valores dados, se forma y se resuelve la proporción directa siguiente:

Número	%
860	100
129	x

Entonces, $x = \frac{129(100)}{860} = 15.$ Luego, 129 es el 15% de 860.

- Qué porcentaje (%) de 93 es 0.186?

Con los valores dados, se forma y se resuelve la proporción directa siguiente:

Número	%
93	100
0.186	x

Entonces, $x = \frac{0.186(100)}{93} = 0.2.$ Luego, 0.186 es el 0.2% de 93.

ACTIVIDAD 8

Resuelve los siguientes problemas, según lo indicado:

A. Hallar el:

1. 10% de 1500	6. 5.35% de 67
2. 42% de 1250	7. $16\frac{2}{3}$ de $15\frac{3}{4}$
3. $\frac{2}{9}$ de 580	8. 1% de 100
4. 3.75% de 25	9. 4% de $\frac{1}{50}$
5. $6\frac{1}{2}$ de 1854.25	10. 5% de 750.898

B. De qué número es:

1. 40 el 5%	6. 420 el 65%
2. 13 el 20%	7. 180 el $15\frac{3}{4}$ %
3. 24 el $\frac{1}{16}$	8. 875 el 10%
4. 3.75 de 25%	9. 4 de $\frac{1}{50}$ %
5. 12 el 25%	10. 27.85 el 22%

C. Qué porcentaje (%) de:

1. 1950 es 156	6. 24 es 2.4052
2. 815 es 431.95	7. 85 es 2.7625
3. 40 es 0.30	8. 615 es 33.825
4. 2.75 es 3.5	9. 20 es $\frac{3}{4}$
5. 68 es 272	10. 512 es 0.64

B. Problemas generales

En la práctica, generalmente cualquier problema donde intervenga el tanto por ciento se puede resolver con los conocimientos adquiridos sobre proporción directa; ya que todo problema de este tipo corresponde a una proporción directa, en donde sus elementos relacionan las cantidades con sus respectivos valores en por ciento.

Ejemplos

En una fábrica, el 8% de las máquinas se descomponen y son reemplazadas por otras nuevas. ¿Cuántas máquinas habían en la fábrica si las máquinas reemplazadas fueron 144?

Solución

a) Las dos columnas son:

Número	%
x	100
144	8

Las dos razones que se forman son:

$\frac{x}{144}$; $\frac{100}{8}$

b) La proporción obtenida es

$\frac{x}{144} = \frac{100}{8}$, que es directa; por lo que, aplicando la propiedad fundamental,

se obtiene $x = \frac{(144)(100)}{8} = 1800$

c) Luego, en la fábrica habían 1800 máquinas.

Jardines S. A. Compró 200 pequeñas plantas a B/.1.08 cada una. Si consideran que 15 plantas morirán antes de ser vendidas, ¿a qué precio deben vender las plantas sanas si quieren un margen de utilidad bruta del 46% del costo?

Solución

El costo total de las plantas es: 200 (B/.1.08) = B/.216.00
Para determinar el 46% del costo, se considera lo siguiente:

B/.	%
216	100
x	46

De donde, al resolver la proporción

$\frac{216}{x} = \frac{100}{46}$, se obtiene que

$$x = \frac{(216)(46)}{100} = 99.36$$

O sea, que la utilidad bruta es igual a B/.99.36.

Entonces, el costo total más la utilidad bruta es:

B/.216.00 + B/.99.36 = B/.315.36

Como son 185 plantas las que quedan para la venta (200 – 15 = 185), entonces 315.36/185 = 1.71, o sea, B/.1.71. Para obtener un margen de utilidad del 46% del costo, las plantas sanas se deben vender a B/.1.71 cada una.

Pedro tenía B/.80.00. Si gastó el 20% y dio a su hermano el 15% del resto, ¿cuánto le queda?

Solución

Para determinar lo que Pedro se gastó, se considera y resuelve la proporción

B/.	%
80	100
x	20

Entonces, $x = \frac{80(20)}{100} = 16$ O sea, que él se gastó B/.16.00

Por otro lado, el resto que le quedó es : 80.00 - 16.00 = 64.00; o sea, B/.64.00, y para determinar lo que le dio a su hermano se considera la siguiente proporción:

B/.	%
64	100
x	15

Entonces, $x = \frac{64(15)}{100} = 9.60$, o sea B/.9.60. Así, la suma de lo que se gastó y lo que le dio al hermano es: B/.16.00 + B/.9.60 = B/.25.60. Así, al hermano le dio B/.9.60. Luego, B/.80.00 - B/.25.60 = B/.54.50. Es decir, que a Pedro le quedan B/.54.50

ACTIVIDAD 9

Resuelve los siguientes problemas:

1. Un fabricante de mercancías enlatada utiliza un margen de utilidad bruta del 28% del costo total para fijar precio a su mercancía. Si fabricar una lata de frutas cuesta B/.1.59, ¿a qué precio debe venderla?
2. Una finca tiene 480 hectáreas. El 35% de la mitad de la finca está sembrada de caña y el resto de la finca de frutas menores. ¿Cuántas hectáreas se tienen sembradas con frutas menores?
3. Las ventas de un almacén durante

un año, han importado B/.18675.00. De esa cantidad, el 64% se destina a gastos. ¿Cuál ha sido la ganancia?

4. Una compañía adquiere un propiedad de 1800 caballerías de la siguiente manera: el 22% de la finca lo paga a B/.2000.00 la caballería; el 56% a B/.800.00 la caballería y el resto a B/.500 la caballería. ¿Cuánto es el importe de la compra?
5. Se incendia una casa que estaba asegurada en el 86% de su valor y se cobran B/.4300.00 por el seguro. ¿Cuál era el valor de la casa?
6. Una silla para la cocina que cuesta B/.29.32 se vendió en B/.52.95. Determine el porcentaje del margen de utilidad bruta sobre:
   a. El costo ,y
   b. El precio de venta.

(Redondee las respuestas al porcentaje completo más cercano).

SECCIÓN DE ÁLGEBRA

UNIDAD 1.
ORDEN CRECIENTE Y DECRECIENTE DE UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA

Un polinomio esta ordenado, si sus términos aparecen de forma tal que los exponentes de una letra escogida como ordenatriz, guarden un orden: (según el orden de los números naturales) en forma ascendente o descendente.

Ejemplo

Ordenar la expresión,
$6a^3x^2 - 5a^3 + 2a^2x + x^3 - x^4$,
en orden ascendente respecto a letra x.
Al ordenar la expresión tenemos:

$-5a^3 + 2a^2x + 6a^3x^2 + x^3 - x^{4.}$

Ejemplo

Ordenar la expresión,
$-x^8y^2 + x^{10} + 3x^4y^6 - x^6y^4 + x^2y^8$
en orden descendente respecto a y.
Ordenando la expresión tenemos:
$x^2y^8 + 3x^4y^6 - x^6y^4 - x^8y^2 + x^{10}$

ACTIVIDAD 1

- Ordenar las siguientes expresiones algebraicas en forma ascendente con respecto a la variable **y**.
  a) $2y^3 - 3 + 4y^2 + y^5$
  b) $y^5 + 5y + y^4 – y^3$
  c) $^2/_3\, y^3 + {^3/_5}y^4 - 6y^2 - 2y^6 - 12$
  d) $^1/_2y^5 + by^3 + 5by - y^4$

- Ordenar las siguientes expresiones algebraicas en forma descendente con respecto a la variable **x**.
  a) $10x^3yz^2 - 11 + 23xyz$
  b) $5x^4 - 15x^2 + 3x^3 - 10 + 20x$
  c) $29x^3 - 7x^2a^2 - 2x^5 - 8xy + a^3 + 7x^4$
  d) $12z^4b^7x^2 - {^1/_3}a^4b^3x^3 - {^1/_2}ab$

UNIDAD 2.
VALORIZACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Valorizar una expresión algebraica consiste en sustituir cada variable por el valor asignado en el problema, y luego, efectuar las operaciones indicadas en la expresión.

Observación : Las operaciones se resuelven en el siguiente orden:
a) Potencias y raíces.
b) Multiplicaciones y divisiones.
c) Sumas y restas.
d) Si hay paréntesis, éstos se resuelven primero; aplicando siempre el orden anterior.

Ejemplo

Valorizar la expresión; $a^2 - 2ab + b^2$, para $a = 3$ y $b = 4$. Sustituyendo los valores de cada variable y resolviendo la expresión tenemos:

$$\begin{aligned} a^2 - 2ab + b^2 &= (3)^2 - 2(3)(4) + (4)^2 \\ &= 9 - 24 + 16 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ejemplo

Valoriza la expresión: $\dfrac{b-a}{n} + \dfrac{m-b}{d} + 5a$
para los valores $a = 3$, $b = 4$, $d = {^1/_2}$, $m = 6$, $n = {^1/_{4.}}$

Sustituyendo los valores de cada variable y resolviendo la expresión tenemos:

$$\frac{b-a}{n}+\frac{m-b}{d}+5a = \frac{4-3}{\frac{1}{4}}+\frac{6-4}{\frac{1}{2}}+5(3)$$

= 1(4) + 2(2) + 15
= 4 + 4 + 15
= 23

ACTIVIDAD 1

Valorice las siguientes expresiones según los valores indicados.

1) $4x - 2y + 5$; para $x = 1$, $y = 2$.
2) $2x - 5y + 13$; para $x = -2$, $y = 3$
3) $-6x + y - 2z + 10$; para $x = {}^1/_3$, $y = 2$, $z = -{}^1/_2$
4) $a - 3b + {}^1/_2 c + 10$; para $a = {}^3/_4$, $b = -{}^1/_5$, $c = -5$
5) $(4x - 2y) - 10x + 4$; para $x = 2$, $y = 1$.

UNIDAD 3.
OPERACIONES ENTRE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

3.1 Adición entre monomios y polinomios

Adición de monomios semejante

Se denominan *términos semejantes* o *monomios semejantes*, a todos los términos que tienen la misma parte literal; o sea, que tienen las mismas letras y las letras iguales están elevadas a exponentes iguales.

Ejemplos

$4y$ con $-3y$; $-2x^2y$ con $-{}^3/_4 x^2y$; $-2b^3cd^2$ con $5cd^2b^3$

Regla

Para sumar monomios semejantes, sumamos sus coeficientes atendiendo a las siguientes reglas. Luego al resultado le agregamos la parte literal.

- Si los números tienen igual signo, súmelos y al resultado le antepone el signo común.
- Si los números tienen signo diferente, réstele al número de mayor valor numérico el otro número; y al resultado le antepone el signo de la cantidad con mayor valor numérico.
- Se deben ordenar las expresiones dadas, de ser posible, en orden alfabético.

Ejemplos

- Sumar: $4x$, $-5x$, $+7x$.
  Como todos son monomios semejante, sumaremos sus coeficientes y le

colocamos la parte literal.

$4x - 5x + 7x = 11x - 5x$ sumando los números de signos iguales (regla 1)

$= 6x$ restamos los números de signos diferentes (regla 2)

- Sumar: $3y^2, -5x, -4$

  Como los monomios son no semejantes, su suma queda indicada.

  $3y^2 + (-5x) + (-4) = 3y^2 - 5x - 4.$

- Sumar: $3xy^2, -2x^2y, -6xy^2, -6x^2y.$

  $3xy^2 - 2x^2y - 6xy^2 - 6x^2y = -3xy^2 - 8x^2y.$ Sólo sumamos los términos semejantes.

Adición de polinomios

Para sumar dos o más polinomios, los escribimos uno debajo del otro, de manera que los monomios semejantes queden en columna. Luego sumamos los términos monomios de cada columna según la regla anterior.

Ejemplos

- Sumar: $4a - 3b + 5c;\ 2a - 4c + 7b.$

  Colocamos los polinomios según la regla indicada y obtenemos:

$$\begin{array}{l} 4a - 3b + 5c \\ \underline{2a + 7b - 4c} \\ 6a + 4b + c \end{array}$$

- Sumar: $8x + y - z + 2u;\ -3x - 4y - 2z + 2u;\ -4u + 3z + 4x + 5y.$

  Colocando los polinomios según regla indicada obtenemos:

$$\begin{array}{r} 2u + 8x + y - z \\ 2u - 3x - 4y - 2z \\ -4u + 4x + 5y + 3z \\ \hline 0 + 9x + 2y + 0 \end{array}$$

Respuesta: $9x + 2y$

- Sumar: $a - b;\ b - c;\ c + d;\ a - c;\ c - d.$

$$\begin{array}{ccccc} a & -b & & & \\ & b & -c & & \\ & & c & +d & \\ a & & -c & & \\ & & c & -d & \\ \hline 2a & & & & \end{array}$$

ACTIVIDAD 1

- En los siguientes polinomios, reducir los términos semejantes.

1) $7a - 9b,\ 6a - 4b.$
2) $a,\ b - c - b - c,\ 2c - a.$
3) $5x - 11y - 9,\ 20x - 1 - y.$
4) $-6m,\ 8n,\ 5 - m - n - 6m - 11.$
5) $-a,\ b,\ 2b - 2c,\ 3a,\ 2c - 3b.$
6) $-81x,\ 19y - 30z,\ 6y,\ 80x,\ x - 25y.$
7) $15a^2 - 6ab - 8a^2,\ 20 - 5ab - 31,\ a^2 - ab.$
8) $-3a,\ 4b - 6a,\ 81b - 114b,\ 31a - a - b.$

- Suma de polinomios.

1) $3a + 2b - c;\ 2a + 3b + c.$
2) $7a - 4b + 5c;\ -7a + 4b - 6c.$
3) $m + n - p;\ -m - n + p.$
4) $9x - 3y + 5;\ -x - y + 4;\ -5x + 4y - 9.$
5) $a + b - c;\ 2a + 2b - 2c;\ -3a - b + 3c.$
6) $p + q + r;\ -2p - 6q + 3r;\ p + 5q - 8r.$
7) $-7x - 4y + 6z;\ 10x - 20y - 8z;\ -5x + 24y + 2z.$
8) $-2m + 3n - 6;\ 3m - 8n + 8;\ -5m + n - 10.$
9) $-5a - 2b - 3c;\ 7a - 3b + 5c;\ -8a + 5b - 3c.$
10) $ab + bc + cd;\ -8ab - 3bc - 3cd;\ 5ab + 2bc + 2cd.$

3.2. Sustracción entre monomios y polinomios

Sustracción de monomios

Regla

Para restar dos monomios semejantes, cámbiele el signo al monomio sustraendo.

(De esta manera toda sustracción se transforma en suma). Luego sumamos atendiendo a la regla de adición de monomios semejantes.

Ejemplos

- De $9x$ restar $6x$ (sustraendo $6x$)
  Planteando la operación tenemos:
  $9x - (+6x) = 9x - 6x = 3x$.
- Restar $-9y$ de $5y$ (sustraendo $-9y$)
  $5y - (-9y) = 5y + 9y = 14y$.
- Réstese, $10m$ de $-4n$. (sustraendo $10m$)
  $-4n - (+10m) = -4n - 10m = -4n - 10m$
  $= -10m - 4n$

Sustracción de polinomios

Para restar polinomios, le cambiamos el signo a todos los términos del polinomio sustraendo. Luego realizamos la suma de dos polinomios.

Ejemplos

- De $8x + b$ restar $3x + 4$.
  (polinomio sustraendo $3x + 4$)

$$\begin{array}{r} b + 8x \\ \underline{-3x - 4} \\ b + 5x - 4 \end{array}$$

polinomio sustraendo con signos contrarios a los originales

- Restar: $-x^2 - x + 6$ de $-8x^2 + 5x - 4$

$$\begin{array}{r} -8x^2 + 5x - 4 \\ x^2 + x - 6 \\ -7x^2 + 6x - 10 \end{array}$$

polinomio sustraendo con signos contrarios a los originales

ACTIVIDAD 2

- Efectúe las siguientes operaciones.
  1) De $4x$ reste $-2x$
  2) De $5y$ reste $4y$
  3) De m^2 reste $2m^2$
  4) De $6x^2y$ reste $3x^2y$
  5) De $0.5z$ reste $1.8z$
  6) De $8.42t^2$ reste $-5.3t^2$

- Realice las siguientes operaciones entre polinomios.
  1) De $a + b$ restar $a - b$.
  2) De $2x - 3y$ restar $-x + 2y$.
  3) De $8a + b$ restar $-3a + 4$.
  4) De $x^2 - 3x$ restar $-5x + 6$.
  5) De $a^3 - a^2b$ restar $7a^2b + 9ab^2$.
  1) De $x - y + z$ restar $x - y + z$.
  2) De $x + y - z$ restar $-x - y + z$.

3.3. Operaciones combinadas con expresiones algebraicas

En algunas ocasiones en la escritura de expresiones algebraicas se combinan las operaciones fundamentales. Para expresar con claridad su contenido, se requiere el uso de los signos de agrupación. Por tal motivo vamos a enunciar las reglas para trabajar con los paréntesis o signos de agrupación.

- Si el paréntesis esta precedido del signo más (+), al eliminarlo todos los términos dentro de él, conservan su signo.

Ejemplo

$x^4 + (- 5x + x^2 - 8) = x^4 + x^2 - 5x - 8.$

- Si el paréntesis esta precedido del signo menos (-), al eliminarlo todos los términos dentro de él, cambian de signo.

Ejemplo

$$2m-(3x -6y^2+7b) = 2m - 3x + 6y^2 - 7b$$
$$= - 7b+2m - 3x + 6y^2$$

- Cuando dentro de un signo de agrupación están incluidos otros paréntesis, la supresión de los mismos se realiza eliminándolos de adentro hacia fuera, aplicando en cada caso la regla correspondiente.

$3x^2 -\{ 3x +2 -[3x^2 +5x -(4x +6)-6x + 2]\}$
$= 3x^2 - \{3x +2 +[3x^2+5x - 4x -6 -6x + 2]\}$
$= 3x^2 - \{ 3x + 2 + [3x^2 - 5x - 4]\}$
$= 3x^2 - \{ 3x + 2 + 3x^2 - 5x -4 \}$
$= 3x^2 - \{ - 2x + 3x^2 - 2 \}$
$= 3x^2 + 2x - 3x^2 + 2$
$= 2x + 2$

ACTIVIDAD 3

Elimínese los símbolos de agrupación en los siguientes problemas y efectúe las operaciones indicadas.

1) a - (2b+c) + (a+b-c)
2) (x+2y) - (z-2x) - (y+z)
3) (h+2j-k) - (-2h+j-3k)
4) 2r - (s-3t) + (3r-2s) -t
5) a - [3b-4c- (2a-3b+4c) + 2a] - (b+c)
6) x - 2y + [3x-(2y+4x) - 3y] -3x
7) 2x - (3y+4z) -[x+2y -(z-2x+y) -z] - (x-y) +z

3.4. Multiplicación entre monomios y polinomios

La multiplicación entre expresiones algebraicas se divide en tres casos: multiplicación de monomios, multiplicación de un monomio por un polinomio y multiplicación de polinomios.

A. Multiplicación de monomios

Para multiplicar dos monomios se deben realizar los siguientes pasos:

- **Producto de los signos**.

El producto de los signos se establece mediante la siguiente regla:
El producto de cantidades con signos iguales es positivo.

(+)(+) = + ó (-)(-) = +

El producto de cantidades con signos diferentes es negativo.

(-)(+) = - ó (+)(-) = -

- **Producto de los coeficientes**

Este producto se obtiene multiplicando los coeficientes de los monomios, como si fueran números positivos.

- **Productos de las partes literales**

Para efectuar este producto, aplicamos las propiedades de las potencias.

- **Propiedades de las Potencias**
  - El producto de dos potencia de igual base es igual a la base elevada a la suma de los exponentes.
  - O sea: $\mathbf{a^n \times a^m = a^{n+m}}$.

Ejemplos

- Multiplicar $(\frac{3}{5}x^3y^4)(-\frac{5}{6}x^2y^3)$

Solución:
- $(+)(-) = -$
- $\frac{3}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{2}$
- $(x^3y^4)(x^2y^3) = x^5y^7$
- Luego, $(\frac{3}{5}x^3y)(-\frac{5}{6}x^2y^3) = -\frac{1}{2}x^5y^7$

- Multiplicar $(-4a^3b^2)(-2a^2b^4)$

Solución:
- $(-)(-) = +$
- $(4)(2) = 8$
- $(a^3b^2)(a^2b^4) = a^5b^6$
- Luego, $(-4a^3b^2)(-2a^2b^4) = 8a^5b^6$

B. Multiplicación de un monomio por un polinomio

Para multiplicar un monomio por un polinomio, multiplique el monomio por cada uno de los términos (monomios) del polinomio.

Ejemplos
- Multiplicar $3a^2 - 4ab - 2b^2$ por $2a^2b^2$

$2a^2b^2(3a^2 - 4ab - 2b^2) = (2a^2b^2)(3a^2) + (2a^2b^2)(-4ab) + (2a^2b^2)(-2b^2)$
$= 6a^4b^2 - 8a^3b^3 - 4a^2b^4$

- Multiplicar, $-3xy^2$ por $2x^3 - 5x^2y + xy$
  Esta multiplicación también se puede efectuar colocando un factor debajo del otro.

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 5x^2y + xy \\ \underline{-3xy^2 \qquad\qquad} \\ -6x^4y^2 + 15x^3y^3 - 3x^2y^3 \end{array}$$

C. Multiplicación de dos polinomios

Para multiplicar dos polinomios aplique los siguientes pasos:

- Respecto a la misma variable ordene ambos polinomios en la misma forma (ascendente o descendente).
- Multiplique cada término del polinomio multiplicador por todos los términos del polinomio multiplicando.
- Coloque los productos parciales uno debajo de los otros, de modo que los términos semejantes queden en columna.
- Sume cada columna.

Ejemplo

Multiplique $x^2 + y^2 - 3xy$ por $y - x$

- Ordenaremos respecto a x en forma descendente.
  $x^2 + y^2 - 3xy = x^2 - 3xy + y^2$
  $y - x = -x + y$
- Efectuando los pasos 2, 3, 4, obtenemos

$$\begin{array}{l} \quad x^2 - 3xy + y^2 \\ \underline{-x + y \qquad\qquad\qquad} \\ -x^3 + 3x^2y - xy^2 \\ \underline{\qquad\quad x^2y - 3xy^2 + y^3} \\ -x^3 + 4x^2y - 4xy^2 + y^3 \end{array}$$

Ejemplo

Multiplique $x^2 + 1 + x$ por $x^2 - x - 1$

Ordenando respecto a x en forma descendente y efectuando la multiplicación tenemos:

$$
\begin{array}{r}
x^2 + x + 1 \\
\underline{x^2 - x - 1} \\
x^4 + x^3 + x^2 \qquad\qquad \\
- x^3 - x^2 - x \qquad \\
- x^2 - x - 1 \\
\hline
x^4 \qquad -x^2 - 2x - 1
\end{array}
$$

ACTIVIDAD 4

- Realice las siguientes multiplicaciones.

1) 2 por -3. 2) -15 por 16.
3) $2x^2$ por $-3x$.
4) -4 por -8. 5) ab por $-ab$
6) $-4a^2b$ por $-ab^2$

- Multiplicación de monomio por polinomio.

1. $3x^3 - x^2$ por $- 2x$
2. $8x^2y - 3y^2$ por $2ax^3$
3. $x^2 - 4x + 3$ por $- 2x$
4. $a^3 - 4a^2 + 6a$ por $3ab$.
5. $a^2 - 2ab + b^2$ por $-ab$.
6. $x^5 - 6x^3 - 8x$ por $3a^2x^2$.

- Multiplicación de polinomio por polinomio.

1) $a + 3$ por $a - 1$.
2) $a - 3$ por $a + 1$.
3) $x + 5$ por $x - 4$.
4) $m - 6$ por $m - 5$.
5) $-x + 3$ por $-x + 5$.
6) $-a - 2$ por $-a - 3$.
7) $x^2 + xy + y^2$ por $x - y$.
8) $a^2 + b^2 - 2ab$ por $a - b$.

3.5. División entre monomios y polinomios

En la división entre expresiones algebraicas se presentan tres casos: la división entre monomios, la división de un polinomio entre un monomio y división de un polinomio entre un polinomio. Como la división es un caso particular de la multiplicación, las leyes de los signos estudiado en la multiplicación se cumplen en esta operación.

A. División de un Monomio entre un Monomio

Al resolver esta operación, realice los siguientes pasos.

- **Determine el cociente de los signos**
  La ley de los signos en la división es igual a la ley de los signos en el producto.

- **Cociente de los coeficientes**
  Este se obtiene dividiendo el coeficiente del dividendo entre el coeficiente del divisor.

- **Cociente de la parte literal**
  Este se obtiene aplicando la ley de los exponentes que dice: La división de dos potencias de igual base, es igual a la base, elevada a la diferencia entre el exponente del dividendo y el del divisor. Simbólicamente, $\mathbf{a^m \div a^n = a^{m-n}}$.

Ejemplos

- Divida $-20x^6y^3z^5 \div 5x^4y^3z^3$
  1. Cociente de los signos: $- \div + = -$
  2. Cociente de los coeficientes:
     $20 \div 5 = 4$
  3. Cociente de la parte literal:
     $x^6y^3z^5 \div x^4y^3z^3 = x^{6-4}y^{3-3}z^{5-3}$
     $= x^2y^0z^2$ como $y^0 = 1$
     $= x^2z^2$

  Luego tenemos:

  $$-20x^6y^3z^5 \div 5x^4y^3z^3 = -4x^2z^2$$

- Divida $-5m^4n^a \div -15mn^2p$
  1. Cociente de los signos: $- \div - = +$
  2. Cociente de los coeficientes: $5 \div 15 = {}^5/_{15} = {}^1/_3$
  3. Cociente de la parte literal: $m^4n^a \div mn^2p = m^{4-1}n^{a-2}p^{0-1} = (m^3n^{a-2})/p$

  Luego tenemos:

$$-5m^4n^a \div -15mn^2p = \frac{m^3n^{a-2}}{3p}$$

Observación

Recuerde que en la división cada cociente encontrado, se multiplica por el divisor y se resta del dividendo.

B. División de un monomio por un polinomio

Para dividir un polinomio por un monomio, dividimos cada término, del polinomio entre el monomio.

Ejemplos

- Dividir $(2a^6 - 20a^4b^3 + 32a^3b^2) \div 4a^3$

  Dividiendo cada término del polinomio entre el monomio

$$(2a^6 - 20a^4b^3 + 32a^3b^2) \div 4a^3 =$$

$$\frac{2a^6}{4a^3} - \frac{20a^4b^3}{4a^3} + \frac{32a^3b^2}{4a^3} = \frac{1}{2}a^3 - 5ab^3 + 8b^2$$

- Dividir $6a^8b^8 - 3a^6b^6 - a^2b^3$ entre $3a^2b^3$

  Efectuando la división tenemos

$$6a^8b^8 - 3a^6b^6 - a^2b^3 \div 3a^2b^3 =$$

$$\frac{6a^8b^8}{3a^2b^3} - \frac{3a^6b^6}{3a^2b^3} - \frac{a^2b^3}{3a^2b^3}$$

$$= 2a^6b^5 - a^4b^3 - \frac{1}{3}$$

C. División de polinomio entre polinomio

Para dividir un polinomio entre otro polinomio aplique el siguiente procedimiento.

- Ordene los polinomios dividendo y el divisor en forma descendente.
- Divida el primer término del dividendo entre el primer término del divisor, así obtenemos el primer cociente.
- Multiplique el cociente obtenido por el divisor. Este producto réstelo del dividendo.
- Si hay residuo, considérelo como nuevo dividendo y repita los pasos 2 y 3.
- La división termina cuando el residuo sea cero, o cuando el grado del polinomio dividendo sea menor que el grado del polinomio divisor.
- Si el residuo es cero, el resultado es el cociente obtenido. En caso contrario, el resultado es igual al cociente encontrado, más la fracción cuyo numerador es el residuo y denominador el polinomio divisor.

Ejemplo

- Dividir $x^2 - 20 + x$ entre $x - 4$.

  Ordenando, dividendo y divisor en forma descendente con relación x, tenemos:

$x^2 + x - 20 \quad \div$	$x + 5 \quad =$	$x - 4$
$-\underline{x^2 - 5x}$	(2)	(1) (4)
$-4x - 20$	(3)	
$\underline{+4x + 20}$	(5)	
$0 \quad 0$		Respuesta: $x - 4$.

Descripción de los valores señalados por los números encerrados en los paréntesis.

(1) El valor x, es el cociente obtenido al dividir el primer término del dividendo

entre el primer término del divisor.

(2) Esta expresión es el producto del primer cociente por el divisor con sus signos cambiados, para transformar la resta en una suma.

(3) Esta expresión es el primer residuo de la división. Según el procedimiento descrito, será utilizado como nuevo dividendo.

(4) Esta cantidad es el nuevo cociente encontrado al continuar con el proceso de la división.

(5) Este binomio es el producto del último cociente parcial por el divisor, con sus respectivos signos cambiados para transformar la resta en una suma.

Ejemplos

- Dividir $x^5 - 5x + 12x^2$ entre $- 2x + x^2 + 5$.

$$
\begin{array}{l}
x^5 \qquad\qquad +12x^2 - 5x \div x^2 - 2x + 5 = x^3 + 2x^2 - x \\
\underline{- x^5 + 2x^4 - 5x^3} \\
0 + 2x^4 - 5x^3 + 12x^2 - 5x \\
\quad - 2x^4 + 4x^3 - 10x^2 \\
\qquad 0 - x^3 + 2x^2 - 5x \\
\qquad\quad \underline{+ x^3 - 2x^2 + 5x} \\
\qquad\qquad 0 + 0 + 0
\end{array}
$$

Respuesta: $x^3 + 2x^2 - x$.

Cuando en el dividendo faltan algunas potencias, al ordenarlo para dividir, deje los espacios correspondientes a los términos faltantes.

- Divida $5x - 10 + 6x^2$ entre $3x - 2$.

$$
\begin{array}{l}
6x^2 + 5x - 10 \div 3x - 2 = 2x + 3 \\
\underline{- 6x^2 + 4x} \\
0 + 9x - 10 \\
\quad \underline{- 9x + 6} \\
\qquad 0 - 4
\end{array}
$$

Respuesta: $2x - 3 - \frac{4}{3x - 21}$

ACTIVIDAD 5

- División entre monomios.
  1) $-5a^2$ entre $- a$
  2) $14a^3b^4$ entre $-2ab^2$
  3) $-a^3b^4c$ entre a^3b^4.
  4) $-a^2b$ entre $-ab$
  5) $54x^2y^2z^3$ entre $-6xy^2z^3$.
  6) $-5m^2n$ entre m^2n.
  7) $-8a^2x^3$ entre $-8a^2x^3$.
  8) $-xy^2$ entre $2y$.

- División de polinomio entre monomio.
  1) $a^2 - ab$ entre a.
  2) $3x^2y^3 - 5a^2x^4$ entre $-3x^2$.
  3) $3a^3 - 5ab^2 - 6a^2b^3$ entre $-2a$.
  4) $x^3 - 4x^2 + x$ entre x.
  5) $4x^8 - 10x^6 - 5x^4$ entre $2x^3$.
  6) $6m^3 - 8m^2n + 20mn^2$ entre $-2m$.

- División de polinomio entre polinomio
  1) $a^2 + 2a - 3$ entre $a + 3$.
  2) $a^2 - 2a - 3$ entre $a + 1$.
  3) $x^2 - 20 + x$ entre $x + 5$.
  4) $m^2 - 11m + 30$ entre $m - 6$.
  5) $x^2 + 15 - 8x$ entre $3 - x$.
  6) $6 + a^2 + 5a$ entre $a + 2$.
  7) $6x^2 - xy - 2y^2$ entre $y + 2x$.
  8) $-15x^2 - 8y^2 + 22xy$ entre $2y - 3x$.

UNIDAD 4.
PRODUCTOS NOTABLES

Llamaremos productos notables a multiplicaciones especiales, cuyos resultados se obtienen aplicando ciertas reglas. A continuación enunciaremos los productos notables más comunes y respectiva regla.

4.1. El producto de un número por la suma o diferencia de dos o más números:

a(b ± c ± d...) = ab ± ac± d....

El producto de una cantidad por la suma o diferencia de dos o más cantidades es igual a la suma o diferencia de los productos de la primera cantidad por cada una de las cantidades de la segunda expresión.

Ejemplos

- $5x(2y - 5) = (5x)(2y) - (5x)(5) =$ $10xy + 25x$
- $2x^2y(3x + 2y - 5xy)$
  $=(2x^2y)(3x) + (2x^2y)(2y) - (2x^2y)(5xy)$
  $=6x^3y + 4x^2y^2 - 10x^3y^2$

4.2. El producto de la suma por diferencia de dos números

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

La suma por la diferencia de dos cantidades es igual al cuadrado de la cantidad positiva en ambos binomios, menos el cuadrado de la cantidad negativa.

Ejemplos

- $(4a + 3b)(4a - 3b) = (4a)^2 - (3b)^2 = 16a^2 - 9b^2$
- $(-5x^2 + 2y)(5x^2 + 2y) = (2y)^2 - (5x^2)^2 = 4y^2 - 25x^4$
- $\left(\frac{1}{2}x^n - \frac{1}{3}y\right)\left(\frac{1}{2}x^n + \frac{1}{3}y\right) = \left(\frac{1}{2}x^n\right)^2 - \left(\frac{1}{3}y\right)^2$

  $= \frac{1}{2}x^{2n} - \frac{1}{9}y^2$

4.3. El cuadrado de la suma o diferencia de dos números

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

El cuadrado de la suma de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad, más o menos, el doble producto de la primera cantidad por la segunda, más el cuadrado de la segunda cantidad.

Ejemplos

- $(3x + 5y)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(5y) + (5y)^2$
  $= 9x^2 + 30xy + 25y^2$
- $\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}y^3\right)^2 = \left(\frac{1}{3}x^2\right)^2 - 2\left(\frac{1}{3}x^2\right)\left(\frac{1}{2}y^3\right) + \left(\frac{1}{2}y^3\right)^2$

  $= \frac{1}{9}x^4 - \frac{1}{3}x^2y^3 + \frac{1}{4}y^6$
- $(5a - 7b)^2 = (5a)^2 - 2(5a)(7b) + (7b)^2$
  $= 25a^2 - 70ab + 49b^2$
- $(3x^2 - 5y^3)^2 = (3x^2)^2 - 2(3x^2)(5y^3) + (5y^3)^2$
  $= 9x^4 - 30x^2y^3 + 25y^6$

4.4. El cubo de la suma o diferencia de dos números

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^3 \pm b^3$

El cubo de la suma de dos cantidades es igual a, el cubo del primer término, mas (o menos) tres veces el producto del cuadrado del primer término por el segundo, mas tres veces el producto del primer término por el cuadrado del segundo, mas (o menos) el cubo del segundo término.

Ejemplos

- $(2x + 1)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2(1) + 3(2x)(1)^2 + (1)^3$
  $= 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$
- $(3x + 5)^3 = (3x)^3 + 3(3x)^2(5) + 3(3x)(5)^2 + (5)^3$
  $= 27x^3 + 135x^2 + 225x + 125$
- $(3x^2-2y)^3=(3x^2)^3-3(3x^2)^2(2y)+3(3x^2)(2y)^2-(2y)^3$
  $= 27x^6 - 54x^4y + 36x^2y^2 - 8y^3$
- $(2y^2 - 5x^2)^3=(2y^2)^3-3(2y^2)^2(5x^2)+3(2y^2)(5x^2)^2-(5x^2)^3$
  $=8y^6-60x^2y^4 +150x^4y^2-125x^6$

4.5. El producto de dos binomios de la forma $(ax + b)(cx + d)$

$(ax + b)(cx + d) =$
$ac\, x^2 + (bc + ad)\, x + bd$

La regla de este producto es difícil de recordar, por lo tanto aplicaremos el esquema anterior. Según él, las cantidades unidas por las líneas se multiplican y los dos productos obtenidos en la parte superior forman el primer y tercer término de la respuesta. Luego, el segundo término de la respuesta se obtiene al sumar los productos obtenidos en la parte inferior.

Ejemplos

- $(2x-5)(2x+3)=(2x)(2x)+[(2x)(3)+(2x)(-5)]+(-5)(3)$
  $= 4x^2 - 4x - 15$
- $(x - 6)(x - 5)=(x)(x) + [(1)(-5)+(1)(-6)]x+(-6)(-5)$
  $= x^2 - 11x + 30$
- $(3x-7)(4x+2) = (3)(4)x^2 +[(3)(2)+(-7)(4)]x +(-7)(2)$
  $= 12x^2 -22x -14$

Actividad 1

1) $(a^2 + x^2)(x^2 - a^2)$
2) $(2a - 1)(1 + 2a)$.
3) $(2m + 9)(2m - 9)$
4) $(6m^2 - mx^2)(6m^2 + mx^2)$
5) $(1 - 8xy)(8xy + 1)$
6) $(a^{x+1} - 2b)(2b + a^{x+1})$
7) $(0.3y - 1/5)(0.3y + 1/5)$
8) $(3x^a - 5y^m)(5y^m + 3x^a)$
9) $(2x -7)(7 +2x)$
10) $(4y-5)(5+4y)$
10) $(2xy - 3)^2$
11) $(5y + 2)^2$
11) $(2x + 3y)^2$
12) $(1 + 3x^2)^2$
13) $(4m^5 + 6n^4)^2$
14) $(0.5x^3 - 2/5)^2$
15) $(4ab^2 + 5xy)^2$
16) $(0.4y^3 - 4/5)^2$
17) $(a^2x - by)^2$
18) $(0.4y - 0.3x)^2$
19) $(a^m - b^n)^2$
20) $(0.6y + 0.5)^2$
21) $(x^{a+1} + y^{x-2})^2$
22) $(0.6y^4 - 0.3)^2$
23) $(2a - 3b)^2$
24) $(0.75x^3 - 1/7)^2$
25) $(x^5 - 3ay^2)^2$
26) $(x^m - y^2)^2$
27) $(x + 4)(x - 4)$
28) $(x + 7)(x - 3)$
29) $(2x + 3)(x - 5)$
30) $(x^3 + 7)(x^3 - 5)$
31) $(n^2 - 1)(n^2 - 20)$
32) $(a + 2)^3$
33) $(a^2 - 2b)^3$
34) $(1 - 3y^2)^3$
35) $(0.3x - 0.1y)^3$
36) $(0.2x^3 - 0.3)^3$
37) $(3x + 5)(2x - 4)$
38) $(x^2 - 3)(3 + x^2)$
39) $(5x - 2)(2 - 3x)$
40) $(\underline{1}x + {}^{1}/_{3})({}^{9}/_{2}\, x - 4)$
41) $(0.4x + 1/3)(10x + 4)$
42) $(x^2 - 4)^3$
43) $(m + 3)^3$
44) $(2x + 3y)^3$
45) $(0.5y - 1/3)^3$
46) $(0.2x^4 - 0.3)^3$

UNIDAD 5.
FACTORIZACIÓN

Factorizar una expresión algebraica significa escribirla como un producto de dos o más factores. Por ejemplo, la expresión $(3x+1)(x-3)$ está factorizada, ya que esta expresada como un producto de dos cantidades: $(3x+1)$ y $(x-3)$. Pero, la expresión $(x-1)(y+1)+(x-3)$ no esta factorizada; aunque aparece un producto, la expresión se encuentra escrita como suma. Al factorizar una expresión, siempre deshacemos el proceso de una multiplicación. En este caso un producto notable.

5.1. Factor común de varios monomios

Se llama factor común de varios monomios al máximo común divisor de los monomios. O sea, el mayor término que divide a todos y cada uno de los términos de la expresión

Ejemplos

1. El factor común de los monomios: $10x^2y$, $5xy^3$, $45x^3y^3z$, es el término $5xy$.
2. En los monomios: $12a^2b^6c$, $72a^3b^4c^2$, $96a^4b^3c^5$, el monomio común es $12a^2b^3c$.

5.2. Factor monomio de un polinomio (Método práctico)

- Busque el número mayor que divida expresiones a los coeficientes.
- Busque el factor común de la parte literal.
- La factorización es igual al producto del factor común por los cocientes obtenidos al dividir cada término entre el factor común.

$$ax + ay + az = a(x + y + z)$$

Ejemplos

Factorizar las siguientes expresiones:

1. $10b - 20ab^2 = 10b(1 - 2ab)$.
2. $10a^2 -5a+25a^3 =5a(2a-1+5a^2)=5a(5a^2+2a-1)$
3. $18mxy^2 - 54m^2x^2y^2 + 72my^2$
   $= 18my^2(x - 3mx^2 + 4)$

5.3. Factor polinomio de un polinomio

El factor común polinomio de varios multinomios, es el mayor polinomio que divida exactamente a los multinomios. La factorización de varios multinomios por un polinomio es igual al producto del polinomio común por los cocientes de dividir cada multinomio entre el polinomio común.

Ejemplos

Factorice los siguientes polinomios:

- $2x(x - y) - 3(x - y)$.

En los polinomios anteriores, el factor común es $(x - y)$. Dividiendo $2x(x - y)$ entre $(x - y)$ obtenemos como resultado a $2x$. Así mismo, a división de $3(x - y)$ entre $(x - y)$ es igual a 3. Por lo tanto la factorización anterior es:
$2x(x - y) - 3(x - y) = (x - y)(2x - 3)$

- Factorice: $3y(2x - 1)-5(2x - 1)+x(2x -1)$
  $=(2x - 1)(3y - 5 + x)=(2x - 1)(x + 3y - 5)$
- Factorice $y(x - 2) - 3(-x + 2)$.

Como los términos dentro de los paréntesis difieren solamente en los signos, éstos se cambian multiplicando las cantidades que hay dentro de una expresión por (-1) y anteponiéndole a dicho paréntesis un signo menos. Luego factorice según el caso indicado.

$$\begin{aligned} Y(x-2)-3(-x+2) &= y(x-2)-[-3(x-2)] \\ &= y(x-2)+3(x-2) \\ &= (x-2)(y+3) \end{aligned}$$

1. **Factor común por agrupación de términos**

En algunos casos en que no hay factor común para todos los términos de un polinomio, pero si para algunos de ellos, éstos se asocian de manera que dichos agrupamientos tengan un factor común. Luego factorizamos según la regla del factor común monomio y la de factor común polinomio, si es posible.

Factorizar: $3m^2 - 6mn + 4m - 8n$
Asociando tenemos : $(3m^2 - 6mn) + (4m-8n)$
Factorizando cada grupo obtenemos: $3m(m - 2n) + 4(m - 2n)$
Factorizando de nuevo por $(m - 2n)$ tenemos: $(m - 2n)(3m + 4)$
$3m^2 - 6mn + 4m - 8n = (m - 2n)(3m + 4)$.

Ejemplo

Factorizar:2
$x^2 - 3xy - 4x + 6y$
$=(2x^2 - 3xy) + (-4x + 6y)$. Asociando dos a dos términos
$= x(2x - 3y) + 2(-2x + 3y)$.Factorizando en cada grupo

Observe que, los términos dentro del expresión, sólo difieren en los signos. Para lograr que tengan signos iguales Factorizando por (-1). en el segundo término $2[-(2x-3y)] = -2(2x-3y)$, luego tenemos: $x(2x - 3y) - 2(2x - 3y)$, expresión factorizable por $(2x - 3y)$. Por lo tanto, factorizando tendremos:

$$x(2x - 3y) - 2(2x - 3y) = (2x - 3y)(x - 2).$$

5.5. Diferencia de dos cuadrados

La diferencia de dos cuadrados se obtiene al multiplicar la suma por la diferencia de sus respectivas raíces cuadradas.

$\mathbf{a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = (a + b)(a - b)}$ donde **a** y **b** son las respectivas raíces cuadradas de a^2 y b^2.

Ejemplos

- $16x^2 - 25y^4 = (4x + 5y^2)(4x - 5y^2)$
  $4x$, $5y^2$, raíces cuadradas de $16x^2$ y $25y^4$, respectivamente.

- $\underset{\downarrow \atop \frac{1}{4}a}{\frac{1}{4}a^2} - \underset{\downarrow \atop \frac{1}{9}b}{\frac{1}{9}b^2} = (\frac{1}{4} + \frac{1}{9})(\frac{1}{4} - \frac{1}{9})$ raices del minuendo y el sustraendo

- $\underset{\downarrow \atop a^n}{a^{2n}} - \underset{\downarrow \atop 3b^{2m}}{9b^{4m}} = (a^n - 3b^{2m})(a^n + 3b^{2m})$; raíces cuadradas del minuendo y el sustraendo

- $\overset{2x,}{\uparrow}\quad \overset{(x+y)}{\uparrow}$ raíces del minuendo y el sustraendo
  $$\begin{aligned} 4x^2-(x+y)^2 &= [2x+(x+y)][2x-(x+y)]. \\ &= [2x + x + y][2x - x - y] \\ &= (3x + y)(x - y) \end{aligned}$$

5.6. Factores de una expresión que es un trinomio cuadrado perfecto

Volviendo a los productos notables, le recordamos que un trinomio cuadrado perfecto es el desarrollo del cuadrado de un binomio. Así que, escribiendo sus fórmulas, pero en sentido contrario tenemos:

$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$ (1)
$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$ (2)

Para factorizar un trinomio cuadrado perfecto, debemos verificar si cumple con las condiciones de las expresiones 1 ó 2.

Ejemplos

· Factorizar: $x^2 + 10x + 25$
Observe que, x^2 y 25 son los cuadrados de x y 5. Además puede comprobar que el doble producto de x y 5 es 10x. Como la expresión corresponde al desarrollo del cuadrado del binomio (x + 5), (caso 1), su factorización es:

$$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$$

· Factorizar: $-20xy + 4x^2 + 25y^2$
Observando el ejemplo podemos verificar que $4x^2$ y $25y^2$ son los cuadrados de 2x y 5y; además, -20xy es el doble producto de 2x y 5y. Por lo tanto, el ejemplo en mención, corresponde al desarrollo del cuadrado de la diferencia de 2x y 5y. (caso 2).

Luego su factorización es:
$4x^2 - 20xy + 25y^2 = (2x - 5y)^2$.

- Factoriza: $x^2 + \frac{1}{4}b^2 + bx = x^2 + bx + \frac{1}{4}b^2$

Cuadrados perfectos: x^2, $^1/_4 b^2$
Raíces cuadradas: x , $^1/_2 b$
Doble producto: $2(x)(^1/_2 b) = bx$ Luego, el ejemplo se factoriza según caso (2).

$$X^2 - bx + {}^1/_4 b^2 = (x - {}^1/_2 b)^2$$

- Factorizar: $a^2 - 2a(a - b) + (a - b)^2$

Cuadrados perfectos: a^2 , $(a - b)^2$
Raíces cuadradas: a, (a - b)
Doble producto: 2a(a - b). Luego, el ejemplo se factoriza según (1).

$$\begin{aligned} a^2 + 2a(a-b) + (a-b)^2 &= [a + (a-b)]^2 \\ &= [a + a - b]^2 \\ &= (2a - b)^2 \end{aligned}$$

5.7. Factores de una expresión que es un cubo perfecto de binomios

Por los productos notables sabemos que, un cubo perfecto corresponde al desarrollo del cubo de la suma o diferencia de dos cantidades. Por lo tanto su factorización corresponde a una de las siguientes expresiones:

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$ (1)

$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$ (2)

Para que una expresión se factorice como cubo perfecto debe cumplir con las condiciones de las expresiones 1 y 2.

Ejemplo

- Factorizar: $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$ Según la regla del cubo de un binomio, el resultado debe tener dos cubos perfectos. Si sus respectivas raíces fueran a y b, los dos términos restantes son igual a: $3a^2b$ y $3ab^2$.

En el ejemplo encontramos los cubos $8x^3$ y 1, tienen respectivas raíces cúbicas; 2x y 1. También podemos verificar que $12x^2$ y 6x corresponden a los resultados de las expresiones $3(2x)^2(1)$ y $3(2x)(1)^2$. Por lo tanto el ejemplo es un cubo perfecto, y corresponde al caso (1). O sea:

$8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = (2x + 1)^3$

- Factorizar: $8x^6 - 36x^4y^3 + 54x^2y^2 - 27y^9$.

Cubos perfectos: $8x^6$ y $- 27y^9$
Raíces cúbicas: $2x^2$ y $- 3y^3$
Triples productos: $3(2x^2)^2(-3y^3) = -36x^4y^3$
$3(2x^2)(-3y^3)^2 = 54x^2y^3$
El ejemplo es un cubo perfecto y corresponde al caso dos.
$8x^6 - 36x^4y^3 + 54x^2y^6 - 27y^9 = (2x^2 - 3y^3)^3$.

5.8. Factores de un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

Si el trinomio puede escribirse de alguna de las siguientes formas:

$x^2 + (a + b)x + (a)(b)$ (1)
$x^2 + (a - b)x + (a)(-b)$ (2)
$x^2 + (-a + b)x + (-a)(b)$ (3)
$x^2 + (-a - b)x + (-a)(-b)$ (4)

Se factorizan así:

(1) $(x + a)(x + b)$
(2) $(x + a)(x - b)$
(3) $(x - a)(x + b)$
(4) $(x - a)(x - b)$

Ejemplos

(1) Factorizar: $x^2 + 5x + 6$ como el ejemplo se puede escribir de la forma (1),
$x^2 + (3 + 2)x +(3)(2)$, entonces:
$x^2 + 5x + 6 = x^2 + (3 + 2)x + (3)(2)$
$= (x + 3)(x + 2)$

(2) $x^2 + x - 12 = x^2 + (4 - 3)x + (4)(-3)$ Forma (2)
$= (x + 4)(x - 3)$

(3) $x^2 - 5x - 6 = x^2 + (-6 + 1)x + (-6)(1)$ Forma (3)
$= (x - 6)(x + 1)$

5.9. Factores de un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

Un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, si es factorizable, siempre podrá expresarse como una de las formas anteriores. Para ello hacemos la siguiente transformación:

$$ax^2 + bx + c = \frac{(ax)^2 + b(ax) + ac}{a}$$

Observe que en esta transformación, multiplicamos toda la expresión por el coeficiente de x^2, y luego dividimos por la misma cantidad.

Así; la expresión $(ax)^2 + b(ax) + ac$, corresponde a uno de los casos anteriores, por tanto puede ser factorizada de acuerdo a alguna de las reglas descritas. Con anterioridad. Generalmente, uno o los dos factores obtenidos son factorizables, obteniéndose así, las cantidades que permiten simplificar la expresión.

Ejemplo

- Factorizar: $6x^2 - 7x - 3$

Transformando la expresión tenemos:

$$ax^2 + bx + c = \frac{(ax)^2 + b(ax) + ac}{a}$$

$$6x^2 - 7x - 3 = \frac{(6x)^2 - 7(6x) + (3)(6)}{6}$$

multiplicando por 6 y dividiendo a la vez por 6

$$6x^2 - 7x - 3 = \frac{(6x)^2 + (-9 + 2)(6x) + (-9)(2)}{6}$$

aplicando caso 3

$$6x^2\text{-}7x\text{-}3 = \frac{(6x\text{-}9)(6x+2)}{6}$$

factorizamos según caso 3

$$6x^2\text{-}7x\text{-}3 = \frac{3(2x\text{-}3)2(3x+1)}{6}$$

aplicamos factor común monomio

$$6x^2\text{-}7x\text{-}3 = (2x - 3)(3x+1)$$

simplificando 3 y 2 con 6

- **Factores de la suma de dos cubos perfectos**

La suma de dos cubos se factoriza mediante la expresión:
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2\text{-}ab + b^2)$

Observe que la suma de dos cubos se descompone en el producto de dos factores, los cuales se describen así:

- El primer factor esta formado por la suma de las raíces cúbicas de los cubos perfectos.
- El segundo factor es igual a, el cuadrado de la primera raíz cúbica, menos el producto de las dos raíces, más el cuadrado de la segunda raíz.

Ejemplos

- Factorice: $8x^3 + 125y^3$

Raíces cúbicas: 2x, 5y. Luego:
$8x^3+125y^3=(2x+5y)[(2x)^2\text{-}(2x)(5y)+(5y)^2]$
$=(2x+5y)(4x^2 - 10xy + 25y^2)$

- Factorice: $27y^6 + 64$

Raíces cúbicas: $3y^2$, 4. Luego tenemos que:
$27y^6 + 64 = (3y^2 + 4)[(3y^2)^2 - (3y^2)(4) + (4)^2]$
$= (3y^2 + 4)(9y^4 - 12y^2 + 16)$.

5.11. Factores de la diferencia de dos cubos perfectos

La diferencia de dos cubos se factoriza según la siguiente expresión:

$a^3 - b^3 = (a\text{-}b)(a^2 + ab + b^2)$

Ejemplos

- Factorice: $8x^3 - 1$

Raíces cúbicas; 2x y 1.
$8x^3 - 1= (2x\text{-}1)[(2x)^2 +(2x)(1)+(1)^2] = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$

- Factorice: $\frac{1}{27}y^6\text{-}8$

Raíces cúbicas; $^1/_3\, y^2$, 2.

$$\frac{1}{27}y^6 - 8 = (\frac{1}{3}y^2\text{-}2)\ [(\frac{1}{3}y^2)^2 + (\frac{1}{3}y^2)\ (2) + 2^2]$$
$$= (\frac{1}{3}y^2\text{-}2)\ (\frac{1}{9}y^4 + \frac{2}{3}y^2 + 4)$$

ACTIVIDAD

Resuelve los siguientes problemas:

1) $5a^2 + a$
2) $1 -(a\text{-}3b)^2$
3) $9x^2 - 6xy + y^2$
4) $343 + 8a^3$
5) $1 - x^3$
6) 6am - 4an - 2n + 3m
7) 2xy - 6y + x2 - 32
8) $n^2 + n - 42$
9) $x^8 - 6x^4 y^4 + y^8$
10) $(m+n)^2 - 6(m+n) + 9$
11) $8m^3 - 27y^6$
12) $81x^4 + 25y^2 - 90x^2y$
13) $1 - m^2$
14) $6m^4 + 7m^2 - 20$
15) $a^2 + 2ab + b^2 - m^2$
16) $(a+m)^2 - (b+n)^2$
17) $6x^2 + 19x - 20$
18) 6am - 3m - 2a + 1

19) $1 - a^2 b^4$
20) $2am - 3b - c - cm$
21) $1 - {}^4/_9\, a^8$
22) $x^2 - 36$
23) $m^2 + 2mx + x^2$
24) $6x^2 - x - 2$
25) $x^2 - 3x - 4$
26) $a^3 -3ab + 5ab^2$
27) $27a^3 - 1$
28) $4x^4 + 3x^2y^2 + y^4$
29) $1 - 4b + 4b^2$
30) $15m^2 + 1m - 14$
31) $a^2 - a - 30$
32) $8a^3 - 12a^2 + 6a - 1$
33) $16a^2 - 24ab + ab^2$
34) $125a^6 + 1$
35) $x^4 + 4x^2 - 21$
36) $x^5 - x^4 + x - 1$
37) $9a^2b + 16a^3b - 24a^2b^2$
38) $-17x^2 - 4$
39) $25x^4 - 81y^2$
40) $b^2 + 12ab + 36a^2$
41) $x^2 - a^2 + 2xy + y^2 + 2ab -b^2$
42) $x^4 + x^2 + 25$
43) $a^8 - 28a^4 + 36$
44) $16 - (2a+b)^2$
45) $125a^2bx - 15a^2by$
46) $x^3 - 64x^4$
47) $81a^6 - 4b^2c^8$
48) $(x+1)^2 - 81$
49) $49a^2b^2 - 14ab + 1$
50) $9a^3 + 63a - 45a^2$
51) $2ax^2 + 6bx^3 - cx^2$
52) $ax + 3x + 2ay + 6y$
53) $(a - c)x - (a - c)y$
54) $12b^2 + 3y - b^2z^3 - yz^3$
55) $c^2 - 8cd + 15d^2$
56) $x^2 - 16xy + 63y^2$
57) $9y^2 - 60y + 100$
58) $36x^2 + 48yz + 16z^2$
59) $2bx + 15n - 5b - 6nx$
60) $x^2 -5mx + 6m^2$
61) $4x -bx - 24y + 6by$
62) $x^2 - 10x + 21$
63) $3x^2 -5x - 2$
64) $2x^2 + 3x - 2$
65) $20x^2 + ax - a^2$
66) $5y^2 - 5y - 6$

UNIDAD 6.
ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

1. Generalidades y definición

Ecuación

Se denomina *ecuación*, a la igualdad que contiene una o varias letras, bajo los cuales se sobrentienden los valores desconocidos o incógnitos.

Ejemplo

La igualdad $4x - 5 = 2x +3$ es una ecuación con una incógnita; ella se satisface para el valor de $x = 4$.

Soluciones de una ecuación

El valor que satisface la ecuación recibe el nombre de *raíz o solución*.

Coeficiente de la ecuación

Los factores numéricos o literales que acompañan las incógnitas, así como el término independiente, es decir, el término que no contiene incógnitas se les llama coeficiente de la ecuación.

Ejemplos

- En la ecuación $3x - 2y + 5 = 0$, los coeficientes son: 3, -2 y 5.

- En la ecuación $ax + {}^1/_2y - 4 = 0$ los coeficientes son: a y ${}^1/_2$.

Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Toda expresión reducible a una ecuación de la forma *ax + b = 0* se denomina ecuación de primer grado en una variable.

Ejemplos

• $5x - 3 = 0$	• $ax + b = 0$
• $7x = -{}^1/_2$	• $3x - 5 = 6x - 8$

2. Partes de una ecuación

A toda ecuación, el signo de igualdad la divide en dos partes denominadas: miembro izquierdo y miembro derecho.

Ejemplo

En la ecuación $4x - 7 = x - 4$, el miembro izquierdo es $4x - 7$ y el miembro derecho es $x - 4$.

3. Propiedades utilizadas al resolver una ecuación lineal

Dos importes propiedades de la igualdad nos permiten resolver las ecuaciones lineales en una variable. Ellas son:

- Si a ambos miembros de una ecuación sumamos o restamos un mismo número, la nueva ecuación es equivalente a la inicial.

Sean a, b, c∈R , si a = b entonces a + c = b + c.

- Si ambos miembros de una ecuación se multiplican o dividen por un mismo número, distinto de cero, la nueva ecuación es equivalente a la inicial. En símbolos podemos expresarla de la siguiente forma:

Sean a, b, c∈R, c ≠ 0. Si a = b entonces ac = bc o $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$

- **Método práctico**
  Cualquier término de una ecuación se puede pasar de un miembro a otro. Al transponerlo ejecutará en el otro miembro, la operación contraria a la que realiza.

Ejemplo

$3x + 5 = -6 \Rightarrow 3x = -6 - 5$ (sumaba, pasó restando)

$\Rightarrow 3x = -11$ (resultado de reducir)

$\Rightarrow x = -11/3$ (multiplicaba, pasó diviendo)

4. Resolución de ecuaciones

Al resolver una ecuación debemos realizar una serie de transformaciones, hasta tanto se hayan obtenido sus raíces o soluciones. O lo que es equivalente a reducir la ecuación a la forma *x = a*.

Procedimiento para resolver ecuaciones lineales

- Transponer términos independientes para reunirlos en un solo miembro y reducirlos.
- Transponer términos que contengan la variable para reunirlos en un solo miembro y reducirlos.
- Si el coeficiente de la variable es distinto de uno , transponer el

coeficiente para reducir la ecuación a la forma $x = a$.

- Comprobar la solución de la ecuación general.

Ejemplos

Hallar el valor de x en las siguientes ecuaciones:

- $16 + 7x - 5 + x = 11x - 3 - x$

$11 + 8x = 10x - 3$ sumando

$8x = 10x - 3 - 11$ el 11 sumaba pasa restando (método práctico)

$8x - 10x = -11 - 3$ el 10x sumaba pasa restando (método práctico)

$-2x = -14$ sumando

$x = \frac{-14}{-2}$ el –2 multiplicaba, pasa dividiendo (método práctico)

$x = 7$ dividiendo

Comprobación de la solución en la ecuación Remplazaremos el valor $x = 7$ en la ecuación general.

$$16 + 7x - 5 + x = 11x - 3 - x$$
$$16 + 7(7) - 5 + 7 = 11(7) - 3 - 7$$
$$16 + 49 - 5 + 7 = 77 - 3 - 7$$
$$67 = 67$$

- $15x - 10 = 6x - (x + 2) + (-x + 3)$

$15x - 10 = 6x - x - 2 - x + 3$ eliminando paréntesis

$15x - 10 = 4x + 1$ sumando (método práctico)

$15x - 4x = 1 + 10$ transponiendo términos (método práctico)

$11x = 11$ sumando

$x = \frac{11}{11}$ (método práctico)

$x = 1$ dividiendo

- $9x - (5x + 1) - \{2 + 8x - (7x - 5)\} + 9x = 0$

$$9x - 5x - 1 - \{2 + 8x - 7x + 5\} + 9x = 0$$
$$13x - 1 - \{7 + x\} = 0$$
$$13x - 1 - 7 - x = 0$$
$$12x - 8 = 0$$
$$12x = 8$$
$$x = \frac{8}{12}$$
$$x = \frac{2}{3}$$

- $\frac{x}{6} + 5 = \frac{1}{3} - x$

Para resolver las ecuaciones fraccionarias, las transformamos en enteras, multiplicando todos sus términos por el máximo común denominador (m.c.d). Por ejemplo:

$$\frac{x}{6}(6) + 5(6) = \frac{1}{3}(6) - x(6)$$

$$x + 30 = 2 - 6x$$
$$x + 6x = 2 - 30$$
$$7x = -28$$
$$x = -4$$

6.5. Problemas de Aplicación

Un problema de aplicación describe hechos reales entre cantidades conocidas y desconocidas, y las relacionadas entre ellas. Tales problemas representan el puente entre la teoría algebraica y la aplicación de dicha teoría a situaciones de la vida real. Nuestro trabajo consiste en transformar esos problemas en expresiones, llamadas ecuaciones, que nos permitan encontrar su solución.

Cada problema es una situación diferente, por lo tanto no es posible dar un patrón que nos permita resolverlos a todos. Sin embargo, las siguientes sugerencias pueden ayudarlo:

- Leer el problema con mucha atención (varias veces si es posible).
- Escribir hechos importantes y sus relaciones.
- Identificar las cantidades desconocidas en término de una variable.
- Escribir una ecuación que relacione las cantidades desconocidas y los hechos descritos en el problema.
- Resolver la ecuación resultante.
- Responder a todas las preguntas del problema.
- Verificar la solución o soluciones en el problema original.

Ejemplo

En un grupo de 35 estudiantes había 10 varones menos que el doble de niñas. Determine cuántos había de cada sexo.

Solución

Determinaremos cuántos varones y cuántas niñas había en el grupo. Aquí tenemos dos valores desconocidos, pero solamente podemos usar una variable. Por lo tanto designemos con x = *número de varones*. Como el grupo tiene 35 estudiantes, entonces el total de alumnos menos la cantidad de varones es igual al número de niñas. Luego, $35 - x$ = *número de niñas*.

Por otro lado, el problema nos dice que hay 10 varones menos que el doble de niñas.

Esta afirmación se plantea en la ecuación:

Número de varones es igual al doble número de niñas menos diez varones. O sea:

$$x = 2(35 - x) - 10$$
$$x = 70 - 2x - 10$$
$$x + 2x = 60$$
$$3x = 60$$
$$x = 20$$

Número de varones: = 20
Número de niñas: = (35 -x) = (35 - 20) = 15
Verificació

Número de varones: = doble de niñas menos 10

$$20 = 2(15) - 10$$
$$20 = 30 - 10$$
$$20 = 20$$

Ejemplo

Julia, Sofía y Marta trabajaron en total 18 horas en una fiesta escolar. Julia y Sofía completaron 11 horas entre ambas y Marta trabajo una hora mas que Julia. Determine cuántas horas trabajó cada una.

Solución

Julia y Sofía trabajaron 11 horas entre ambas.
Sea x = *número de horas trabajadas por Julia.*
Entonces $11 - x$ = *número de horas trabajadas por Sofía*.
Como Marta trabajo 1 hora más que Julia, resulta que,
$x + 1$ = *número de horas trabajadas por Marta*.

El total de horas trabajadas por las tres suma 18 horas. Este hecho se plantea en la ecuación:

$$\begin{aligned} x + (11 - x) + (x + 1) &= 18 \\ x + 11 - x + x + 1 &= 18 \\ x + 12 &= 18 \\ x &= 18 - 12 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Número de horas trabajadas por Julia: $x = 6$
Número de horas trabajadas por Sofía: $11 - x = 11 - 6 = 5$
Número de horas trabajadas por Marta: $x + 1 = 6 + 1 = 7$

Ejemplo

Juan tiene 12 monedas mas que Enrique y entre ambos tienen 78. Determínese cuántas monedas tiene cada uno.

Solución

Sea: x = *número de monedas que tiene Juan.*
Entonces $x - 12$ = *número de monedas que tiene Enrique.*
Juan y Enrique tienen 78 monedas. Esta afirmación se escribe con la ecuación:
Monedas de Juan + Monedas de Enrique = 78 monedas

$$\begin{aligned} x + (x - 12) &= 78 \\ x + x - 12 &= 78 \\ 2x &= 78 + 12 \\ 2x &= 90 \\ x &= 45 \end{aligned}$$

Monedas que tiene Juan: $x = 45$
Monedas que tiene Enrique: $x - 12 = 45 - 12 = 33$

ACTIVIDAD 1

Resuelva las siguientes ecuaciones lineales.

1) $8x + 9 - 12x = 4x - 13 - 5x$.
2) $5y + 6y - 81 = 7y + 102 + 65y$.
3) $16 + 7x - 5 + x = 4x - 3 - x$.
4) $30x - (-x + 6) + (-5x + 4) = -(5x + 6) + (-8 + 3x)$.
5) $15x + (-6x + 5) - 2 - (-x + 3) = -(7x + 23) - x + (3 - 2x)$.
6) $3x + [-5x - (x + 3)] = 8x + (-5x - 9)$.
7) $x - [5 + 3x - \{5x - (6 + x)\}] = -3$.
8) $9x - (5x + 1) - \{2 + 8x - (7x - 5)\} + 9x = 0$.
9) $5(x - 1) + 16(2x + 3) = 3(2x - 7) - x$.
10) $2(3x + 3) - 4(5x - 3) = x(x - 3) - x(x - 5)$.
11) $(4 - 5x)(4x - 5) = (10x - 3)(7 - 2x)$.
12) $14 - (5x - 1)(2x + 3) = 17 - (10x + 1)(x - 6)$.
13) $\frac{3x}{5} - \frac{2x}{3} + \frac{1}{5} = 0$
14) $\frac{1}{2x} + \frac{1}{4} - \frac{1}{10x} = \frac{1}{5}$
15) $\frac{2}{x} - \frac{5}{x} = \frac{7}{10} - \frac{3}{2x} + 1$
16) $\frac{x-2}{3} - \frac{x-3}{4} = \frac{x-4}{5}$
17) $\frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3} - \frac{x-3}{4} = \frac{x-5}{5}$
18) $\frac{2}{3}\left(\frac{x+1}{5}\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{x-6}{3}\right)$

ACTIVIDAD 2

Resuelva los siguientes problemas de aplicación usando ecuaciones de primer grado.

(6) Dos hermanos ganaron B/.1300.00 durante sus vacaciones de verano. El mayor ganó $1^1/_2$ veces más que el otro. Determínese la ganancia de cada uno.
(7) En un grupo de 35 estudiantes había 10 hombres menos que el doble de mujeres. Determínese cuántos había de cada sexo.
(8) Al poner un ribete a un pedazo rectangular de un jardín, cuya longitud era el doble de su anchura, se emplearon 312 ladrillos. Determínese ¿cuántos se pusieron en cada lado?
(9) En una escuela, la mitad de los alumnos menos seis poseen automóviles. El total de automóviles propiedad de los alumnos es 198. ¿Cuántos alumnos hay en la escuela?
(10) Una joven pagó B/.350.00 por un vestido y un sombrero. Determínese el precio del vestido sabiendo que éste costó B/.150.00 más que el sombrero.
(11) Horacio y Saúl van de pesca. Como Horacio es el dueño del bote, convienen en que él tomaría 5 pescados más que Saúl. Si en total pescaron 19 peces, ¿cuántos peces recibe cada uno?
(12) Tomás y Oscar recogieron 36 kilos de fresa. Tomás recogió 3 kilos más que la mitad de los que recogió Oscar. ¿ Cuántos recogió cada uno?

UNIDAD 7.
ECUACIÓN CUADRÁTICA DE UNA SOLA INCÓGNITA

Resolución de la ecuación cuadrática

Toda ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, *con* a, b, c números reales y $a \neq 0$, se le llama ecuación cuadrática o ecuación de segundo grado. Los números a, b, c se denominan coeficientes de la ecuación cuadrática.

Ecuación completa

Si los coeficientes de la ecuación cuadrática son distintos de cero, ella recibe el nombre de ecuación cuadrática completa.

Ejemplos

$3x^2 + 2x - 5 = 0$	$x^2 - 4x - 7 = 0$	$-6x^2 + 9x -10 = 0$

Ecuación incompleta

Si los valores b ó c, o ambos son ceros, entonces se le llama ecuación cuadrática incompleta. Son posibles tres de ecuaciones cuadráticas incompletas:

1) $ax^2 + bx = 0$ $(c = 0 , a \neq 0 , b \neq 0)$
2) $ax^2 + c = 0$ $(b = 0 , a \neq 0 , b \neq 0)$
3) $ax^2 = 0$ $(a \neq 0 , b = 0 , c = 0)$

Ejemplos

$3x^2 - 5 = 0$	$x^2 + 3x = 0$	$7x^2 = 0$

Resolución de la ecuación cuadrática por factorización

Las raíces o soluciones de una ecuación cuadrática son los valores que satisfacen la ecuación. Las ecuaciones cuadráticas pueden tener dos, una o ninguna solución real.

Resolver una ecuación cuadrática es encontrar todas las raíces o soluciones de las mismas.

La solución de la ecuación cuadrática por el método de factorización, utiliza una importante propiedad de la igualdad; la cual en una de sus partes dice:

Si a y b son números reales, y $a \times b = 0$, entonces: $a = 0$ y $b = 0$.

a) Solución de ecuaciones cuadráticas incompletas

Como la ecuación cuadrática puede ser completa o incompleta, existen varias formas de factorizarlas y por lo tanto distintas maneras de resolverlas. En esta sección examinaremos la solución de las ecuaciones cuadráticas incompletas.

- La ecuación $ax^2 + bx = 0$ se resuelve factorizando el primer miembro mediante factor común monomio: $x(ax + b) = 0$. Luego por la propiedad dada tenemos que:
  $x = 0$ ó $ax + b = 0$, de donde $x = \frac{-b}{a}$.
  De este modo, la ecuación cuadrática incompleta $ax^2 + bx = 0$ tiene dos raíces

  $x_1 = 0$, $x = \frac{-b}{a}$.

- La ecuación $ax^2 + c = 0$, tiene soluciones reales solamente si $c < 0$ y $a > 0$ ó $a < 0$ y $c > 0$. Luego su solución se obtiene mediante la factorización, es

$$\left(x+\sqrt{\frac{c}{a}}\right)\left(x-\sqrt{\frac{c}{a}}\right)=0 \Rightarrow \left(x+\sqrt{\frac{c}{a}}\right)=0 \text{ y } \left(x-\sqrt{\frac{c}{a}}\right)=0$$

$$\Rightarrow x_1 = -\sqrt{\frac{c}{a}} \text{ y } x_2 = \sqrt{\frac{c}{a}}$$

- La ecuación $ax^2 = 0$ tiene una sola solución. Esto es así, debido a que $a \neq 0$ y $ax^2 = 0$, necesariamente $x^2 = 0$. O sea, $x \cdot x = 0$ de donde $x = 0$.

b) Resolución de la ecuación cuadrática completa

En el capítulo anterior vimos que algunos trinomios que son factorizables mediante los casos: trinomio cuadrado perfecto, trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ o trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$.

Por lo tanto para resolver una ecuación cuadrática completa, la factorizamos por el método correspondiente a las características que presenta, luego la transformamos en el producto de dos binomios igualado a cero.

Ejemplos

Hallar las raíces o soluciones de las siguientes ecuaciones.

- $3x^2 + 5x = 0$ se resuelve según el caso ($ax^2 + bx = 0$).
  Haciendo $a = 3$, $b = 5$ tenemos que

$x_1 = 0$ y $x_2 = -{}^b/_a \Rightarrow x_1 = 0$ y $x_2 = -{}^5/_3$.
También puede realizar el proceso completo.
$3x^2 + 5x = 0 \Rightarrow x(3x + 5) = 0$
$\Rightarrow x_1 = 0$ ó $3x + 5 = 0$
$\Rightarrow 3x = -5$
$\Rightarrow x_1 = -{}^5/_3$

- $x^2 - 5x - 6 = 0$.
  Este problema pertenece a un caso de factorización de la sección 5.8. Por tanto factorizamos y obtenemos $x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 1) = 0$.
  Luego $x - 5 = 0$ ó $x + 1 = 0$.
  Despejando: $x = 5$ ó $x = -1$

- $4x^2 + 5 = 0$, pertenece al caso $ax^2 + c = 0$. No tiene solución ya que $c > 0$ y $a > 0$.

  $9x^2 - 4 = 0$, pertenece al caso $ax^2 + c = 0$, donde $a > 0$ y $c < 0$ su solución es:

$x_1 = \sqrt{\frac{4}{9}}$ ó $x_2 = -\sqrt{\frac{4}{9}}$ $x_1 = -{}^2/_3$ ó $x_2 = {}^2/_3$.

Solución por fórmula general

Las ecuaciones cuadráticas completas o incompletas también se resuelven mediante el uso de la fórmula general .

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2a}$$

Observación

En la fórmula general el valor **a** corresponde al coeficiente de la variable elevada al cuadrado, **b** al coeficiente de la variable con potencia uno y **c** el término independiente. El símbolo ± en la fórmula, indica la existencia de dos soluciones; una utilizando el signo + y la otra el signo menos, delante de la cantidad subradical.

Ejemplos

Hallar las soluciones de la ecuación cuadrática en cada uno de los ejercicios siguientes.

- $x^2 - x - 6 = 0$. En la ecuación tenemos que $a = 1$, $b = -1$, $c = -6$.
  Reemplazando en al fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-6)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = -2 \\ x_2 = 3 \end{matrix}$$

- Hallar la solución de la ecuación $9x^2 - 4 = 0$. En esta ecuación $a = 3$, $b = 0$ y $c = 4$. ($b = 0$ porque la ecuación no tiene x)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4(9)(-4)}}{2(9)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-0 \pm \sqrt{0 + (16)(9)}}{18} \Rightarrow x = \frac{0 \pm \sqrt{(16)(9)}}{18}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pm(4)(3)}{18} \Rightarrow x_1 = \frac{-(4)(3)}{18} \text{ y } x_2 = \frac{(4)(3)}{18}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-2}{3} \text{ y } x_2 = \frac{2}{3}$$

ACTIVIDAD 1

- Resuelva las siguientes ecuaciones por factorización.

1) $4x^2 - 49 = 0$	2) $9x^2 - 25 = 0$
3) $5x^2 - 45 = 0$	4) $6x^2 - 24 = 0$
5) $x^2 + 1 = 0$	6) $9x^2 + 16 = 0$
7) $x^2 - 2x - 3 = 0$	8) $x^2 - 2x = 8$

9) $x^2 + 3x - 10 = 0$ 10) $2x^2 + 3x = 0$
11) $4x^2 - 9 = 9x$ 12) $12x^2 + 12x = 25$
13) $6x^2 + 4x = 0$ 14) $15x^2 + 9x = 18$
15) $30x^2 - x - 20 = 0$ 16) $2x^2 - 3x = 0$
17) $25x^2 - 30x = 0$ 18) $24x^2 - 2x = 1$

- Resuelva las siguientes ecuaciones usando la fórmula general.

1) $5x^2 - 45 = 0$ 2) $6x^2 - 24 = 0$
3) $x^2 + 3x - 10 = 0$ 4) $2x^2 + 3x = 0$
5) $4x^2 - 9 = 9x$ 6) $12x^2 + 12x = 25$
7) $x^2 + 5 = 5x$ 8) $x^2 - 3 = - x$
9) $9x^2 - 2 = 18x$ 10) $x^2 - 10x + 5 = 0$

UNIDAD 8.
SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas es el conjunto de dos ecuaciones, cada una de ellas, de primer grado y en dos variables.

Ejemplos

$\begin{cases} x + 6y = 27 \\ 7x - 3y = 9 \end{cases}$	$\begin{cases} 8x - 5 = 7y - 9 \\ 6x = 3y + 6 \end{cases}$

Solución de un sistema de ecuaciones de primer grado en dos variables

La solución de un sistema de ecuaciones es el conjunto de valores de x, e y que satisfacen la ecuación. Estos valores se encuentran aplicando los métodos de igualación, sustitución, adición o sustracción (reducción) y determinante.

Método de adición o sustracción.

En este método debemos lograr que el coeficiente de una variable determinada, en ambas ecuaciones, tenga el mismo valor numérico, pero con signos diferentes. Luego sumamos las ecuaciones, transformando las dos ecuaciones en una ecuación de primer grado en una variable, la que se resuelve por métodos conocidos.

Para igualar los coeficientes de una variable, cada ecuación debe multiplicarse por el cociente de dividir el coeficiente de la variable elegida entre el mínimo común múltiplo de los coeficientes de dichas variables. Una vez igualado los coeficientes de una variable en ambas ecuaciones, multiplique una de ellas por -1.

Ejemplo

$$\begin{cases} 8x - 5 = 7y - 9 \\ 6x = 3y + 6 \end{cases}$$

Reducimos cada una de las ecuaciones para darle la forma:

$$\begin{cases} 8x - 7y = -4 \\ 6x - 3y = 6 \end{cases}$$

Elegimos eliminar la variable x, por lo tanto buscamos el mínimo común múltiplo de 8 y 6 que es igual a 24. Luego realizamos las divisiones de 24 entre cada uno de los coeficientes de las variables x. O sea, $24 \div 8 = 3$ y $24 \div 6 = 4$. Por lo tanto la primera ecuación se multiplica por 3 y la segunda por -4. El signo (-) se debe a que las x deben tener coeficientes con signos contrarios. Luego tenemos las nuevas ecuaciones:

$$24x - 21y = -12$$
$$-24x + 12y = -24$$

Su suma es igual a:

$$\begin{array}{rl} 24x - 21y & = -12 \\ \underline{-24x + 12y} & \underline{= -24} \\ -9y & = -36 \end{array}$$

Resolviendo para y tenemos y = 4. Sustituyendo y = 4 en la ecuación (1) tenemos:
$8x - 7y = -4 \Rightarrow 8x - 7(4) = -4 \Rightarrow 8x - 28 = -4 \Rightarrow$ $8x = -4 + 28 = 8x \Rightarrow 24 = x = 3$. Luego, la solución del sistema de ecuaciones esta dado por los valores x = 3 y y = 4.

Ejemplos

$$\begin{cases} \frac{3}{5}x - \frac{y}{4} = 2 \\ 2x = \frac{5y}{2} \end{cases} = \begin{cases} \frac{3}{5}x - \frac{y}{4} = 2 \\ 2x - \frac{5y}{2} = 0 \end{cases}$$

Para resolver este ejemplo, transformamos las ecuaciones con coeficientes fraccionarios en ecuaciones con coeficientes enteros. Para ello, multiplicamos los términos de cada ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores de las cantidades fraccionarias de cada una de ellas. Así,
$\frac{3}{5}x - \frac{y}{4} = 2$ es igual a $20\left(\frac{3}{5}x - \frac{y}{4}\right) = 20(2)$

Simplificando tenemos que se transforma en

$12x - 5y = 40$ (1)

De forma similar en $2x = \frac{5y}{2}$ se obtiene

$4x - 5y = 0$ (2)

Luego obtenemos el nuevo sistema.

$$\begin{cases} 2x - 5y = 40 \\ x - 5y = 0 \end{cases}$$

$12x - 5y = 40$ Multiplicando la ecuación (2) por (-1)
$\underline{-4x + 5y = 0}$

$$\begin{aligned} 8x + 0 &= 40 \\ 8x &= 40 \\ x &= {}^{40}/_{8} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de x en la ecuación $4x-5y = 0$, tenemos:

$$\begin{array}{rl} 4(5) - 5y & = 0 \\ 20 - 5y & = 0 \\ -5y & = -20 \\ y & = {}^{-20}/_{-5} \\ y & = 4 \end{array}$$

La solución del sistema de ecuación es x = 5, y = 4.

Problemas de aplicación

Para plantear algunos problemas necesitamos usar varias variables, ya que en ellos pueden aparecer muchas cantidades desconocidas, y la transformación de su enunciado en ecuaciones que permitan su resolución, se facilita a usar mas de una incógnita.

El procedimiento general para obtener las ecuaciones es similar al utilizado en las ecuaciones lineales. Ello depende en gran parte, de la habilidad individual de cada lector para transformar los enunciados en las expresiones, (ecuaciones) que le permitan resolver el problema.

Ejemplo

El gerente de una librería estimaba un ingreso de B/400.00 en la venta de plumas, B/5.00 cada una, y lápices B/2.50 cada uno. Después de haber vendido la mitad de las plumas y la cuarta parte de los lápices reduce el precio de las primeras a B/4.50 y el de los segundos a B/2.00. Este remanente le produce un ingreso de 202.50. ¿Cuántas plumas y cuántos lápices vendió en total?

Solución

Sea x = cantidad de plumas vendidas a 5.00
y = cantidad de lápices vendidos a 2.50

Luego el ingreso obtenido al vender el total de ambos productos es:

$5x + 2.5y = 400.$

$x - {}^1/_2x$ = Número de plumas después de vender la mitad de ellas.
$y - {}^1/_4y$ = Número de lápices después de vender un cuarto de ellos.

Ingreso obtenido al vender las plumas y lápices que quedaron, después de reducir el precio.

$$4.50\left(x-\frac{1}{2}x\right)+2.00\left(y-\frac{1}{4}y\right) \Rightarrow 4.50\left(\frac{1}{2}x\right)+2.00\left(\frac{3}{4}y\right)=202.50$$

$2.25x + 1.5y = 202.50$

Sistema de ecuaciones resultante.

$$2.25x + 1.5y = 202.50$$
$$5x + 2.5y = 400$$

$$225x + 150y = 20{,}250$$
$$50x + 25y = 4{,}000$$

Resolvemos el sistema por reducción.

$$225x + 150y = 20{,}250$$
$$50x + 25y = 4{,}000$$

$$\begin{aligned} 225x + 150y &= 20{,}250 \\ \underline{-300x - 150y} &\underline{= -24{,}000} \\ -75x &= -3{,}750 \end{aligned}$$

$$x = \frac{-3750}{-75}$$
$$x = 50$$

Sustituyendo en la ecuación: $50+25y = 4{,}000$

$$\begin{aligned} 50(50) + 25y &= 4{,}000 \\ 2500 + 25y &= 4{,}000 \\ 25y &= 4{,}000-2500 \\ 25y &= 1500 \end{aligned}$$

$$y = \frac{1500}{25}$$
$$y = 60$$

Se vendieron 50 plumas y 60 lápices.

Ejemplo

Un propietario recibió B/.1,200 por pago de la renta de dos oficinas en el año 1984. La renta mensual de una era B/.10.00 mayor que la otra. ¿Cuál fue la renta mensual que recibió de cada una si la mas cara estuvo desalquilada dos meses.

Solución

Sea, x = renta mensual de la oficina mas cara.

y = renta mensual de la oficina mas barata.

Como la oficina mas cara estuvo desalquilada dos meses, entonces recibió por su alquiler 10 x balboas y por la más barata 12x balboas. Los B/.1,200, total recibido por el alquiler de las dos oficinas, es igual a la suma de las rentas anuales de cada una de ellas. Así obtenemos la ecuación: $10x + 12y = 1200$.

Como la oficina mas cara vale mensualmente, 10 balboas mas que la otra, de aquí obtenemos la segunda ecuación $x - y = 10$. Luego, formamos y resolvemos el sistema:

$$\begin{aligned} 10x + 12y &= 1200 \\ x - \quad y &= 10 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema por el método de reducción tenemos:

$$\begin{array}{ll} 10x + 12y & = 1200 \\ \underline{12x - 12y} & \underline{= \ 120} \\ 22x & = 1320 \end{array}$$

$$x = \frac{1320}{22}$$
$$x = 60$$

Reemplazando $x = 60$, en la ecuación $x - y = 10$, obtenemos $60 - y = 10$, de donde $y = 50$.

UNIDAD 9.
RESOLUCIÓN DE FÓRMULAS

Una fórmula es una expresión que establece una relación entre varias magnitudes. Toda fórmula establece una igualdad, por lo tanto el siguiente método práctico es útil para despejar cualquier variable en una fórmula dada.

Método práctico

Cualquier término de una ecuación se puede pasar de un miembro a otro. Al transponerlo ejecutará en el otro miembro, la operación contraria a la que realiza antes de moverlo.

Ejemplo
En la fórmula $S = C(1 + it)$ despejar i.

$$C(1 + it) = S \Rightarrow 1 + it = \frac{S}{C} \Rightarrow it = \frac{S}{C} - 1 \Rightarrow$$

$$i = \frac{\frac{S}{C} - 1}{t} \Rightarrow i = \frac{S - C}{Ct}$$

ACTIVIDAD 1

Resuelva los siguientes problemas:

- En $a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$, despejar x.
- En $V = V_0 + at$, despejar V_0, a y t.
- En $a^2 = b^2 + c^2$, despejar b y c.
- En $e = V_0t + {}^1/_2at^2$, despejar V_0.
- En $e = V_0t - {}^1/_2at^2$, despejar V_0 y a.
- En $V = {}^1/_3h - r^2$, despejar h y r.
- En $I = \frac{ctr}{100}$ 1, despejar c, t y r.
- En $u = a + (n-1)r$, despejar a, n y r.

SECCIÓN DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

UNIDAD 10. LA RECTA

Objetivos

- Determinar la ecuación de las rectas.
- Encontrar la pendiente de una recta.
- Determinar la ecuación de una recta si se conocen dos de sus partes.
- Determinar la ecuación de una recta si se conoce su pendiente y un punto.

La representación gráfica del lugar geométrico cuya ecuación se de primer grado en dos variables es una línea recta, así la ecuación

$$Ax + By + C = 0,$$

donde A, B y C son constantes con A y B no simultáneamente cero, es una ecuación general de primer grado y la gráfica de esta ecuación es una línea recta.

Si en esta ecuación general se despeja la variable *y*, entonces la ecuación toma la forma

$$y = mx + b$$

donde *m* y *b* son números reales y su representación en el plano cartesiano es una recta con intersección con el eje y en (0, *b*) y *m* representa la pendiente de la recta y determina la inclinación de la recta.

Ejemplo:

Determine la pendiente y el punto de intersección con el eje *y*.

Solución:

En este caso la pendiente es 2 y el punto de intersección con el eje *y* es (0, -3).

Recuerde que la pendiente de una recta se define como la tangente del ángulo de inclinación

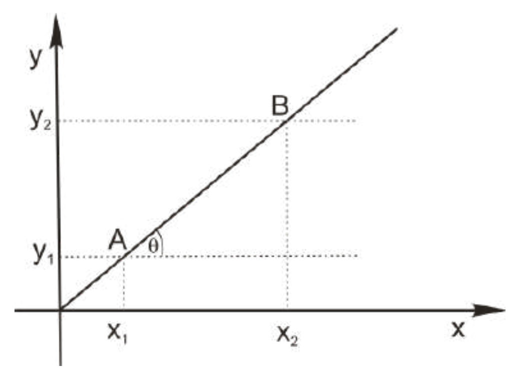


Figura 1.

De esta forma, dados dos puntos cualesquiera A(x1, y1) y B(x2, y2) sobre una recta, el valor de m, de la pendiente de la recta coincide con la tangente del ángulo de inclinación θ de la recta (ver figura 1) y así,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ejemplo

Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos (-2, -3) y (4, 2). Sustituyendo en la ecuación anterior, tenemos

$$m = \frac{2-(-3)}{4-(-2)} = \frac{5}{6}$$

Formas de la ecuación de una recta

a) *Cartesiana:* La ecuación de una recta que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y

$P_2(x_2, y_2)$ es:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$

Ejemplo

Hallar la ecuación de la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(3,-1) y B(-4,5). Utilizando la fórmula anterior tenemos:

$$\frac{y-(-1)}{x-3} = \frac{-1-5}{3-(-4)} \quad \Rightarrow \quad \frac{y+1}{x-3} = \frac{-6}{7}$$

$$\Rightarrow \; 7y+7 = -6x+18$$

$$\Rightarrow \; 7y + 6x - 11 = 0$$

La ecuación de la recta que pasa por (3, -1) y (-4, 5) es $7y + 6x - 11 = 0$.

b) *Punto pendiente:* La ecuación de una recta que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$ y cuya pendiente sea *m* es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ejemplo

Hallar la ecuación de la ecuación de la recta que pasa por el punto (-4,3) y tenga de pendiente ½.

Utilizando la ecuación punto pendiente tenemos que

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x+4) \quad \text{o sea} \quad 2y - 6 = x + 4$$

es decir,

$$x - 2y + 10 = 0$$

ACTIVIDADES

Hallar las ecuaciones de las rectas que satisfacen las condiciones siguientes:

a) Pasa por los puntos (-1,4) y (3, 2).

b) Pasa por los puntos (-2, -3) y (4, 2).

c) Pasa por (0,7) y su pendiente es *m* = -4.

d) Pasa por (3,1) y tiene pendiente *m* = 2.

e) Pasa por (5, -2) y su pendiente es $^{-5}/_{2}$.

UNIDAD 11.
LA CIRCUNFERENCIA

Objetivo

- Determinar la ecuación general de la circunferencia con centro en C(*h*, *k*) y dado su radio r.

Una circunferencia en el lugar geométrico de un punto que se mueve sobre el plano, de tal manera que su distancia desde un punto fijo del plano permanece constante. Si consideramos que el punto fijo, al que llamaremos centro, está en C(*h*, *k*) y la distancia entre C y el punto P(x, *y*) es igual al radio r entonces la ecuación de la circunferencia es

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Como esta ecuación muestra las coordenadas del centro y la longitud del radio, se llama *forma centro radio* de la ecuación de la circunferencia, ver la figura 2.

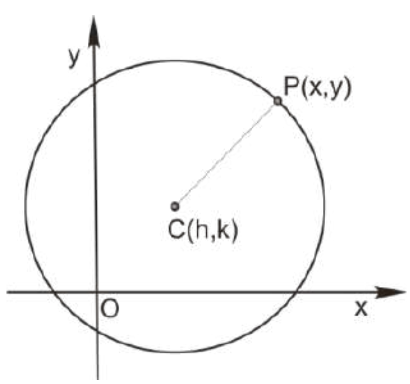


Figura 2.

Si el centro está en el origen (0, 0) y el radio es r, su ecuación es:

$$x^2+y^2=r^2$$

Ejemplo
Si el centro de la circunferencia está en (3, -2) y el radio es 4, la ecuación es:

$$(x-3)^2+(y+2)^2=16$$

Si desarrollamos los cuadrados obtendremos la ecuación

$$x^2-6x+9+y^2+4y+4=16$$

Que equivale a

$$x^2+y^2-6x+4y-3=0\ ,$$

Esta última ecuación es de la forma

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

que representa la *forma general* de la ecuación de una circunferencia.

ACTIVIDADES

Encontrar la ecuación de la circunferencia que tiene las condiciones señaladas en cada problema:

a) Centro en (0, 0) y radio igual a $\sqrt{7}$.

b) Centro en (2, -6) y radio 5.

c) Centro en (0, 4) y radio 4.

d) Centro en (4, 3) y radio 5.

e) Centro en ($^5/_3$, $^1/_3$) y radio $\sqrt{3}$.

f) Centro en (-3, 1) y pasa por (5, -3).

g) Centro en (4, 2) y pasa por (-1, -1).

UNIDAD 12.
LA PARÁBOLA

Objetivos

- Determinar la ecuación canónica de una parábola con vértices en (0, 0) conociendo alguno de sus elementos.
- Dada la ecuación general de la parábola con vértice (0, 0) determinar sus elementos.

Una parábola es el conjunto de los puntos P(x, y) del plano equidistantes de una recta fija L y un punto fijo F. El punto fijo F se llama foco; las rectas fijas es la directriz. En la figura 3 se muestra una parábola con sus elementos.

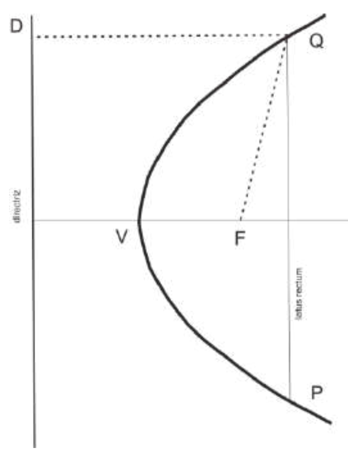


Figura 3.

Donde F es el foco y D es la directriz. El punto V situado a la mitad entre el foco y la directriz está sobre la parábola. Este punto se llama vértice. La ecuación de una parábola con vértice en (0, 0) con foco en (a, 0) es:

$$y^2 = 4ax \quad (1)$$

Si a > 0, la parábola abre hacia la derecha, si a < 0, abre hacia la izquierda como se pude observar en la figura 4.

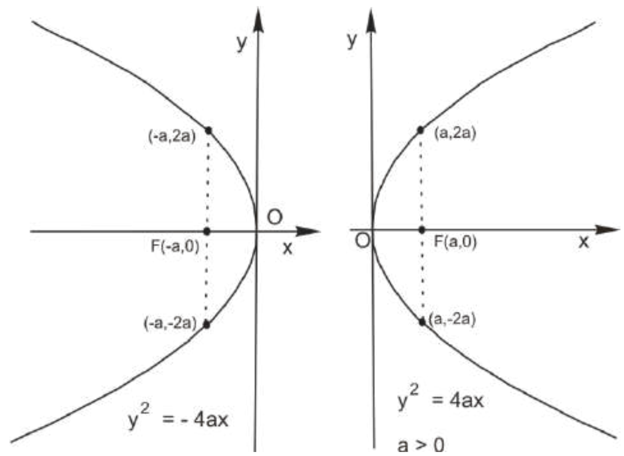
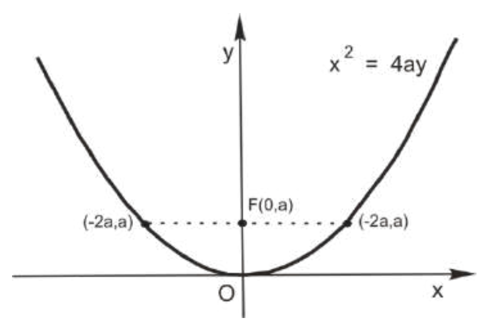


Figura 4.

La ecuación de una parábola con vértice en el origen y foco en (0, a) es:

$$x^2 = 4ay \quad (2)$$

Si la parábola que abre hacia arriba si se tiene que a > 0, y abre hacia abajo si a < 0, como se puede observar en la figura 5.



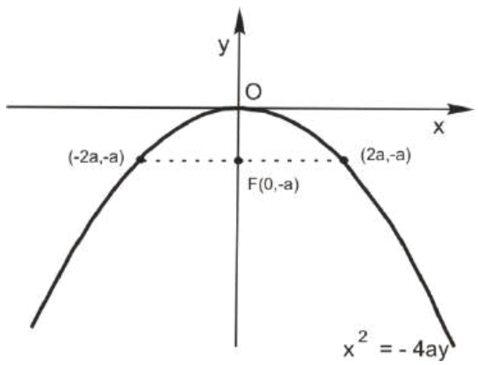


Figura 6.

Las ecuaciones (1) y (2) pueden utilizarse para encontrar las ecuaciones de las parábolas que satisfacen condiciones específicas.

Ejemplo

Escriba la ecuación de la parábola con vértice en el origen y foco en (0, 4). Aplicamos la ecuación (**), la distancia del vértice al foco es 4 y así a = 4, luego tenemos que:

$$x^2 = 16y$$

que es la ecuación buscada.

Ejemplo

Una parábola tiene su vértice en el origen, su eje a lo largo del eje x, y pasa a través del punto (-3, 6). Hallar la ecuación.

La ecuación de la parábola es de la forma (*) . Para determinar el valor de a, sustituimos las coordenadas del punto en esta ecuación, obteniendo,

$$36 = 4a(-3) \Rightarrow -12 = 4a \Rightarrow a = -3$$

La ecuación general de la parábola es $y^2 = -12x$, y el foco está en (-3, 0)

Ejemplo

La ecuación de la parábola es $x^2 = -6y$. Hállense las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud del latus rectum.

La ecuación es de la forma (2) , donde a es negativa. Si hacemos la igualdad

$$4a = -6$$

obtenemos que a = - 3/2. Así, la coordenada del foco es (0, - 3/2) y la directriz es y = 3/2. La longitud del latus rectum es exactamente igual a *4a* , por lo que

latus rectum = 4(3/2) = 6.

ACTIVIDADES

1. Hallar las coordenadas del foco, las coordenadas de los extremos del latus rectum y la ecuación de la directriz de cada parábola en los problemas
   - $y^2 = -16x$
   - $x^2 = 12y$
   - $x^2 = -10y$
   - $x^2 - 8y = 0$

2. Escriba la ecuación de la parábola con vértices en el origen y que satisface la condición dada en cada problema.
   - Foco en (3,0)

- Directriz x + 6 = 0
- Foco en (-4, 0)
- Latum rectumn es 12 y abre hacia la derecha.
- Foco sobre el eje y pasa a través de (2,8)
- Se abre hacia la izquierda y pasa a través de (-1,-1).

UNIDAD 13.
LA ELIPSE

Objetivos

- Determinar la ecuación canónica de la elipse con centro en (0, 0), conociendo algunos de sus elementos.
- Dada la ecuación general de una elipse con centro en (0, 0) determinar sus elementos.

La elipse es el conjunto de puntos en un plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos es constante. Los puntos fijos se llaman *focos* y los denotaremos F_1 y F_2.

Sean los puntos fijos $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$ y 2a la suma constante, a > 0. Si consideramos que P(x, y) es un punto cualesquiera sobre la elipse se observa, de acuerdo a lo siguiente figura $F_1P + PF_2 = 2a$, de acuerdo a la definición y dado que V_1 y V_2 son puntos sobre la elipse, se muestran en la figura 7.

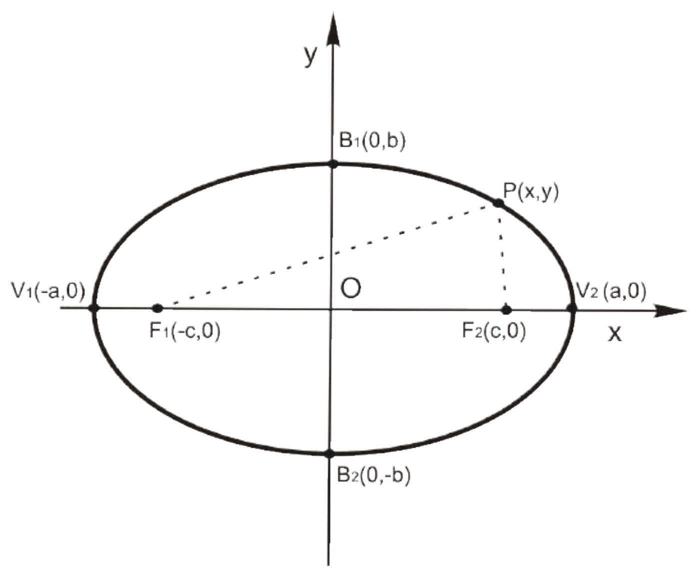


Figura 7.

El *centro de la elipse* que consideramos en este caso en (0,0), es el punto medio del segmento F_1F_2. Se llama *eje mayor de la elipse* al segmento V_1V_2 que pasa por el centro de la elipse, contiene los focos y sus puntos extremos V_1 y V_2 pertenecen a la elipse. V_1 y V_2 son los *vértices* de la elipse. Se llama *eje menor* al segmento B_1B_2 que pasa por el centro de la elipse y es perpendicular al eje mayor.

La ecuación canónica de la elipse con centro (0, 0) y eje mayor sobre el eje x es:

(1*) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ con $a^2 - b^2 = c^2$

Si los focos fueran los puntos (0, c) y (0, -c), el eje mayor estaría sobre el eje *y* y la ecuación resulta de la forma

(2*) $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ con $a^2 - b^2 = c^2$

Ejemplo

Hallar la ecuación de la elipse de centro en el origen y foco (0, 3) y semieje mayor igual a 5. El eje mayor está sobre el eje *y* . Luego la ecuación buscada corresponde a la forma (2*). Como el semieje mayores igual a 5 entonces a= 5. Además c = 3. Luego

$$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{25-9}=4$$

Sustituyendo en (2*) se obtiene la ecuación

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$$

Ejemplo

Dada la elipse $9x^2 + 16y^2 = 576$, hallar la ecuación canónica correspondiente, las coordenadas de los focos y las coordenadas de los vértices.

Dividiremos por 576 la ecuación dada y obtenemos

$$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$$

Luego la elipse tiene focos y vértices sobre el eje x y esta ecuación es de la forma (1*) . Luego a = 8, b = 6 y

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{64-36}=\sqrt{28}=\sqrt{7(4)}=2\sqrt{7}$$

Luego las coordenadas de los vértices son (8,0) y (-8, 0). Las de los focos son $(2\sqrt{7},0)$ y $(-2\sqrt{7},0)$

ACTIVIDADES

1. Obtenga la ecuación de la elipse con un foco en (2,0) y un vértice en (5,0).
2. En cada una de las siguientes elipses, hallar las coordenadas de los vértices y de los focos.

- $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=2$
- $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$

- $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{12}=1$
- $225x^2+289y^2=65025$
- $x^2+6y^2=6$
- $4x^2+9y^2=36$
- $4x^2+9y^2=4$

3. Hallar las ecuaciones de la elipse que satisfagan las condiciones indicadas

a) Focos (±4, 0), y vértices (±, 5) .
b) Focos (0, ±6) semieje menor 8.
c) Centro (0,0), vértice (±5, 0) y b = 2.
d) Vértice (0, ±7) intersección con x (± 4, 0).

UNIDAD 14.
LA HIPÉRBOLA

Objetivos

- Determinar la ecuación canónica de la hipérbola con centro en (0,0) conociendo algunos de sus elementos.
- Dada la ecuación general de una hipérbola con centro en (0,0) determinar sus elementos.

Una hipérbola es el conjunto de puntos en un plano cuya diferencia de distancias a los puntos fijos $F_1(c, 0)$ y $F_2(-c, 0)$ es constante e igual a 2a (ver figura 8).

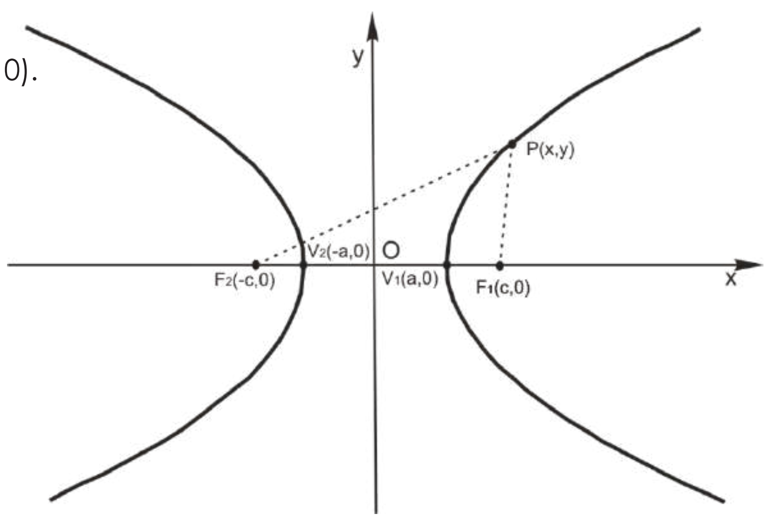


Figura 8

Sea P(x, y) un punto cualquiera de la curva:

- Por definición $F_1P - PF_2 = 2^a$.
- El centro de la hipérbola que consideramos en este caso en (0, 0) es el punto medio del segmento F_1F_2.
- El eje real o transversal de la hipérbola es A'A de longitud 2^a. Los puntos A'(-

a,0) y A (a,0) son los vértices de las parábolas.

- Los focos F_1(-c,0) y F_2(c,0) se encuentran sobre el eje transversal.
- El eje imaginario es B'B de longitud 2b.
- Una hipérbola consta de dos curvas separadas.

La ecuación de la hipérbola con centro en (0, 0) y focos en el eje x es:

(1*) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ con $c^2 - a^2 = b^2$

Si los focos fueran (0, c) y (0, - c) la ecuación sería de la forma

(2*) $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ con $c^2 - a^2 = b^2$

Ejemplo

Dada la hipérbola

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Obtener los vértices, focos y longitud del eje transversal e imaginario. Trazar la hipérbola y mostrar los focos.

La ecuación dada es de la forma (1*) , luego a = 3 y b = 4. Así los vértices son los puntos V_1(-3,0) y V_2(3,.0) . El eje transversal tiene una longitud de 2^a = 6 y el eje imaginario mide 2b = 8. Como $b^2 = c^2 - a^2$ entonces $c^2 = a^2 + b^2$, obteniendo

$$c = \sqrt{9 + 16} = 5$$

Por lo tanto los focos están en F_1(-5, 0), F_2(5,0).

Ejemplo

Determinar una ecuación de la hipérbola que tiene un foco en (5,0) y los extremos de su eje imaginario son (0, 2) y (0, -2).

Observamos que el eje principal o transversal está sobre el eje x pues el foco tiene coordenadas (5, 0). Tenemos que c = 5 y b = 2. Luego $a^2 = c^2 - b^2$ y así

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21}$$

Y la ecuación canónica de la hipérbola es:

$$\frac{x^2}{21} - \frac{y^2}{4} = 1$$

Actividades

1. Hallar los vértices, los focos de las hipérbolas siguientes:
   - $y^2 - x^2 = 9$
   - $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$
   - $4x^2 - 25y^2 = 100$
2. Hallar las ecuaciones de las hipérbolas que satisfacen las condiciones siguientes:

a) Eje transversal 8; focos (±5, 0).
b) Eje imaginario 24, focos (0, ±13)
c) Centro (0, 0), foco (5/2, 0), eje imaginario 2.