MÓDULO INSTRUCCIONAL

ÁREA DE CIENCIAS

BIOLOGÍA - MATEMÁTICA - QUÍMICA FÍSICA

MENSAJE A LOS ESTUDIANTES

Hoy aspiras a ingresar a una carrera del Área Científica en esta Universidad y deseo felicitarte por esta decisión que te forjará como un profesional de alto nivel y te capacitará en un futuro próximo para servir al país con eficiencia y profesionalismo. Para alcanzar dicho objetivo es preciso que dediques el mejor de los esfuerzos haciendo del estudio tu estilo de vida.

Ponemos a tu disposición la Guía de Estudio de Área Científica, que incluye la sección de Biología, Matemática, Química y Física; cuyos temas serán considerados en el examen de Admisión que definirá en un alto porcentaje tu ingreso a la carrera que aspiras.

Esta guía de estudio está dirigida a los estudiantes que aspiran a las carreras que ofrece la Facultad de Ciencias Naturales y Exactas, Facultad de Enfermería y Facultad de Medicina.

Tenemos la certeza que pondrás todo tu empeño y perseverancia hasta lograr las metas propuestas que te conducirán por el camino del éxito.

Magíster Pedro Caballero
Decano
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas

MÓDULO INSTRUCCIONAL

ÁREA DE CIENCIAS

BIOLOGÍA

DOCUMENTO REALIZADO POR:

Profa. María Félix Ríos de Iglesias

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

2013

UNACHI
Hombre y cultura para el porvenir

Universidad Autónoma de Chiriquí

Ciudad Universitaria, David,
Chiriquí, República de Panamá
admision@unachi.ac.pa
Tel.:(507) 775-3485
Fax: (507) 774-2679
www.unaci.ac.pa

FICHA TÉCNICA
11 pulgadas
65 páginas
El contenido académico de este módulo, esta bajo la
responsabilidad de los especialistas de la Facultad.

Publicado por la Dirección de Admisión, 2013

¿PORQUÉ ESTUDIAR BIOLOGÍA?

Al estudiar Biología podrás conocer la vida en todas sus manifestaciones, lo que te permitirá comprender y apreciar el funcionamiento de la naturaleza.

Como egresado de la licenciatura en Biología, tendrás múltiples opciones de especialización, las cuales dependerán de tus inclinaciones o de las prioridades del país. Hoy día áreas como la Ingeniería Genética, la Ecología, los Estudios de Impacto Ambiental, tienen mucho auge en el mundo científico. Por ejemplo, Panamá cuenta con recursos muy valiosos en sus costas; sin embargo, hay pocos especialistas en áreas como Oceanografía, Manejo de Recursos Pesqueros, Biología Marina, entre otros.

Otras oportunidades de especialización poco exploradas en nuestro país son la Biofísica, la Etnobotánica, la Biotecnología y la Micología. Además; en general, todos los licenciados en Biología están capacitados para la docencia en el segundo nivel de enseñanza y como investigadores. Sin duda, ésta es una buena opción.

PRESENTACIÓN

El presente módulo instruccional está diseñado partiendo de contenidos simples a más complejos; pretende proporcionar una nueva metodología para el autoaprendizaje, donde el alumno; no sólo reciba la información, sino que interactúe con ella, mediante actividades relacionadas con cada texto cognitivo. Además, la presentación previa a cada unidad; busca motivar al estudiante al análisis crítico y deducción lógica de los distintos temas a considerar. Los objetivos generales y específicos guiarán el proceso enseñanza- aprendizaje y el resumen que encontrará al finalizar cada unidad le hará recordar los puntos más relevantes abordados en la unidad.

Las actividades sugeridas para cada caso, pretenden promover la adquisición paulatina de conocimientos a partir de su realización por parte de los estudiantes que aspiren a entrar a cualquier carrera que ofrece la Facultad de Ciencias Naturales y Exactas.

UNIDAD 1.
CONCEPTO E IMPORTANCIA DE LA CIENCIA Y LA BIOLOGÍA

Presentación

La ciencia, tanto biológica como las otras, consiste en una manera de interpretar el mundo que nos rodea; investiga principios de orden y ofrece un método para resolver problemas; también proporciona métodos alternativos para describir, predecir y explicar fenómenos y las consecuencias de determinadas acciones.

La definición de Biología como ciencia sólo tiene sentido si conocemos el significado de la vida y la ciencia. La biología estudia las múltiples formas que pueden adoptar los seres vivos, así como su estructura, función, evolución, crecimiento y relaciones con el medio ambiente.

El siguiente texto cognitivo, te ayudará a comprender el amplio campo de las ciencias biológicas y sus interrelaciones con otras ciencias; así como también como se pueden explicar los fenómenos observados en la naturaleza mediante un sistema organizado llamado método científico. Por lo tanto anímate a seguir la lectura e interpretarla ; luego aplica éstos conocimientos en tu vida cotidiana, como buen científico que te propones ser.

Objetivos generales:

1. Comprender la importancia de la ciencia y la biología como una manera de interpretar el mundo que nos rodea.
2. Desarrollar la capacidad de observación, análisis y toma de decisiones con un ojo educado y crítico
3. Inculcar en los estudiantes la fascinación ante la vida que lo inspire a seguir aprendiendo.

Objetivos específicos:

1. Comprender los conceptos de ciencia y biología y su importancia para la comprensión de los distintos aspectos de la vida.
2. Mencionar las diversas disciplinas o campos de estudio de la biología.
3. Analizar la importancia del método científico en la resolución de problemas.

1. Concepto e importancia de la ciencia y la biología

La ciencia es el resultado de la investigación, busca interpretar el mundo que nos rodea; investiga principios de orden. Difiere del arte, la religión y la filosofía en que su búsqueda se limita al mundo natural, el universo físico. La biología es una ciencia y sus principios y métodos son los de cualquier otra ciencia. De hecho un principio básico de la biología moderna es que los seres vivos obedecen a las mismas leyes de la física y la química que rigen la materia inanimada. La biología se ocupa del estudio de los seres vivos y todas sus transformaciones; estudia las múltiples formas que pueden adoptar los seres vivos, así como su estructura, función, evolución, crecimiento y relaciones con el medio ambiente.

Toda investigación científica, incluida la biología, se basa en un conjunto pequeño de supuestos. Aunque nunca podemos demostrar absolutamente esos supuestos, se les ha probado y validado de forma tan exhaustiva que podríamos llamarlos principios científicos. Se trata de los principios de casualidad natural, uniformidad en el espacio y tiempo y percepción común.

2. Campos de estudio de la biología:

La biología abarca un amplio espectro de campos de estudio que , a menudo, se tratan como disciplinas independientes. Entre ellas podemos mencionar las siguientes:

- A escala atómica y molecular: Biología molecular, la bioquímica y la genética molecular.
- A escala Celular: Biología celular
- A nivel pluricelular se estudia la vida en la fisiología, anatomía, histología, embriología o biología del desarrollo.
- A nivel de organismos:
  - Genética: trata del funcionamiento de la herencia genética de los padres a su descendencia.
  - Etología: estudia el comportamiento de los grupos o individuos.
  - Ecología: estudia las interacciones que los organismos establecen unos con otros y con su ambiente físico.
  - Biología evolutiva: Serie de cambios en el reservorio de una generación a la siguiente como consecuencia de procesos como la mutación, la selección natural, el apareamiento no aleatorio y la deriva genética.
  - Astrobiología o (xenobiología): Estudia la posibilidad de la vida más allá de la tierra.

En la actualidad, el desarrollo humano ha hecho que cada una de las ciencias, para explicar los fenómenos, se tenga que relacionar con otras ciencias, lo cual, en el caso de la biología ha dado origen a nuevas ciencias por ejemplo: Biogeografía, bioestadística, biofísica y bioquímica.

- **Biogeografía:** Nos indica la distribución de animales y vegetales en la Tierra.
- **Bioestadística:** Estudio de poblaciones y comunidades.
- **Biofísica**: Estudia la biología con los principios y métodos de la física.
- **Bioquímica:** Es una ciencia que apoya a la Biología en el estudio de las funciones que realizan los organismos y junto con la Biofísica, explican fenómenos como la respiración, la nutrición, la fotosíntesis, etc.

3- **El método científico**:

El método científico es un proceso destinado a explicar fenómenos, establecer relaciones entre los hechos y enunciar leyes que expliquen los fenómenos físicos del mundo y permitan obtener, con estos conocimientos, aplicaciones útiles al hombre.

Los científicos emplean el método científico como una forma planificada de trabajar. Sus logros son acumulativos y han llevado a la humanidad al momento cultural actual. Por lo general, la investigación científica se lleva a cabo bajo ciertos pasos ordenados, los cuales se han desarrollado a través de muchos años y se ha observado que producen resultados precisos, así, los pasos en el método científico pueden pensarse como el método lógico y ordenado de resolver un problema o dar respuesta a una pregunta. No hay un "método científico" único en biología; en cambio hay una multiplicidad de métodos. Algunos factores son comunes a todos: una idea brillante del hombre, el trabajo complementario de los científicos y de las ciencias, la verificabilidad, la utilización de herramientas matemáticas, etc.

Pasos del método científico:

1- Observación: La base del método científico y la fuente última de todos los descubrimientos de la ciencia es la observación cuidadosa y precisa.

2- Definición del problema: No se puede resolver un problema si primero no es delimitado.

3- Antecedentes del problema: Recolección de información acerca del problema. Los científicos deben obtener información a partir de la ya obtenida por otros científicos, si no fuera así, la ciencia no podría avanzar, más de lo que aprendería una persona en su vida. Antes de comenzar un experimento, el científico estudia toda la información sobre el problema. Con frecuencia encuentra que alguien ha contestado ya muchas de las preguntas involucradas. Por ésta razón, una biblioteca con publicaciones científicas, revistas y libros es una parte importante de un centro de investigación. Después de recolectar información y hacer observaciones, el científico construye una explicación funcional o una respuesta probable al problema.

4- Hipótesis: Es un supuesto basado en observaciones previas que se ofrece como explicación del fenómeno o problema. Para ser útil, la hipótesis debe conducir a predicciones susceptibles de probarse con observaciones controladas adicionales, o experimentos.

Aunque una prueba clave de predicción puede demostrar que una hipótesis es falsa o indicar que debe ser modificada, nunca puede confirmar claramente de una vez por todas, que una hipótesis es verdadera, simplemente porque no podemos estar nunca seguros de que hemos examinado toda la evidencia relevante. Sin embargo, repetidas pruebas exitosas de una hipótesis ya sea directamente o en función de las consecuencias que ocurrirán si la hipótesis fuese correcta, proporcionan una evidencia poderosa en favor de la hipótesis.

5- Experimentación: El científico tiene que diseñar experimentos que apoyen o refuten la hipótesis. Los experimentos simples prueban la afirmación de que un solo factor, o variable, es la causa de una sola observación. Para ser científicamente válido, el experimento debe descartar otras posibles variables como causa de la observación. Por ello, los científicos incorporan controles en el diseño de sus experimentos, en los que todas las variables permanecen constantes. Luego, los controles se comparan con la situación experimental, en la que sólo cambia la variable que se está probando. Un solo experimento, nunca es una base suficiente para una conclusión; los resultados deben ser reproducibles no sólo por el investigador original, sino también por otros.

6- Observación y registro de los datos del experimento: Todo lo concerniente al experimento debe registrarse con precisión. ¿Cómo se planeó y se montó?, ¿Bajo qué condiciones se llevó a cabo?, ¿Qué pasó durante el experimento? Y por último, ¿Cuáles fueron los resultados?. El registro puede incluir notas, dibujos, tablas, gráficas o alguna otra información. Estos hechos registrados son los datos. En la investigación moderna, estos datos son procesados en una computadora.

Los datos tienen valor sólo cuando se sacan conclusiones válidas de ellos. Tales conclusiones deben estar por completo basadas en los hechos observados en el experimento..Si los datos son suficientemente interesantes o la hipótesis es importante, las observaciones o los experimentos serán repetidos en un intento para confirmarla, negarla, o ampliarla. En consecuencia los científicos siempre comunican los métodos que usaron para reunir y analizar datos, así como sus conclusiones. Si otros experimentos continúan apoyando la hipótesis, ésta pude llegar a constituir una teoría.

Los datos tienen valor sólo cuando se sacan conclusiones válidas de ellos.

Las conclusiones científicas siempre deben ser tentativas y estar sujetas a modificación si nuevas observaciones o experimentos así lo exigen.

7- Teoría: Es una hipótesis que está apoyada por evidencia experimental durante un largo periodo de tiempo. Es una explicación general de los fenómenos naturales importantes, desarrollada a través de extensas observaciones reproducibles. Explica los hechos y también hace posible la predicción de nuevos descubrimientos.

8- Ley o principio: Una teoría que ha resistido repetidas pruebas durante un periodo dado se eleva el status de **ley o principio**, aunque no siempre se lo identifique como tal.

Por bien diseñado que esté un experimento, de nada sirve si no se comunica.

Si los experimentos no se dan a conocer a otros científicos, con los suficientes pormenores como para que puedan repetirse, no será posible verificar las conclusiones. Sin verificación, los hallazgos científicos no pueden utilizarse con seguridad como base de nuevas hipótesis y experimentos adicionales.

Por bien diseñado que esté un experimento, de nada sirve si no se comunica.

Un aspecto admirable de la investigación científica es que cuando un científico llega a una conclusión, ésta hace surgir de inmediato más preguntas que dan pie a otras hipótesis y más experimentos. **La**

ciencia es una búsqueda interminable de conocimiento.

RESUMEN

- La ciencia es el resultado de la investigación, busca la manera de interpretar el mundo que nos rodea; investiga principios de orden.
- La biología estudia las múltiples formas que pueden adoptar los seres vivos, así como su estructura, función, evolución, crecimiento y relaciones con el medio ambiente.
- La biología es una ciencia que abarca un amplio espectro de campos de estudio que, a menudo, se tratan como disciplinas independientes
- La biogeografía, bioestadística, biofísica y bioquímica son el producto de la relación de la biología con otras ciencias.
- El método científico es un proceso destinado a explicar fenómenos, establecer relaciones entre los hechos y enunciar leyes que expliquen los fenómenos físicos del mundo y permitan obtener, con estos conocimientos, aplicaciones útiles al hombre.
- La base del método científico y la fuente última de todos los descubrimientos de la ciencia es la observación cuidadosa y precisa.
- No se puede resolver un problema si primero no es delimitado.
- La hipótesis es un supuesto basado en observaciones previas que se ofrece como explicación del fenómeno o problema.
- Los científicos deben obtener información a partir de la ya obtenida por otros científicos.
- Un solo experimento, nunca es una base suficiente para una conclusión; los resultados deben ser reproducibles no sólo por el investigador original, sino también por otros.
- Los datos tienen valor sólo cuando se sacan conclusiones válidas de ellos.
- Las conclusiones científicas siempre deben ser tentativas y estar sujetas a modificación si nuevas observaciones o experimentos así lo exigen.
- Una teoría es una explicación general de los fenómenos naturales importantes, desarrollada a través de extensas observaciones reproducibles. Explica los hechos y también hace posible la predicción de nuevos descubrimientos.
- Por bien diseñado que esté un experimento, de nada sirve si no se comunica.

ACTIVIDAD

Después de haber analizado el texto cognitivo, estás convencido que puedes aplicar el método científico, no sólo para generar nuevos conocimientos, sino también para resolver problemas cotidianos. La siguiente evaluación te permitirá poner en práctica lo aprendido.

Evaluación formativa:

Qué pasos daría Usted para explicar el motivo por el cual al subir a su auto, éste no arranca. Aplique el método científico en la resolución de éste problema.

UNIDAD 2.
CONSTITUYENTES QUÍMICOS DE LOS SERES VIVOS.

Presentación

Toda la materia está compuesta de elementos químicos. De los más de 100 que existen, sólo unos pocos forman la mayor parte de la materia viva (H, O, C, N, P, S, Ca, K, Na, Cl, Mn, Mg, S, Zn,Cu, Co, Fe). Éstos constituyen el 99% del peso de los organismos vivos. Combinándolos se obtienen todos los compuestos orgánicos. Las moléculas de los compuestos orgánicos presentan distintos grados de complejidad que van desde moléculas tan sencillas como el metano (CH_4) hasta moléculas con un elevadísimo número de átomos como es el caso de los ácidos nucleicos, lo cual origina una abundante variedad de moléculas orgánicas.

Los compuestos químicos tienen varias funciones en los seres vivos, es decir, realizan un determinado trabajo; fundamentalmente, estas funciones son: estructurales, funcionales y de reserva.

Actualmente se sabe que los seres vivos están formados tanto de materia orgánica, como de materia inorgánica. La presente unidad está confeccionada para que puedas distinguir entre un compuesto orgánico y uno inorgánico y además puedas discernir la importancia de cada uno de éstos compuestos en los seres vivos. Tu análisis crítico te permitirá ir comprendiendo paso a paso, la complejidad de la vida . Disfruta de cada momento que utilizas para construir tu propio aprendizaje.

Objetivo General:
Conocer los principales constituyentes químicos de los seres vivos.

Objetivos específicos:
1- Establecer las diferencias entre compuestos orgánicos e inorgánicos
2- Explicar la estructura y función de los principales compuestos orgánicos.
3- Mencionar los distintos tipos compuestos inorgánicos presentes en los organismos.
4- Explicar las funciones del agua en los seres vivos.

I. Principales constituyentes químicos de los seres vivos:

Todos los seres vivos son una combinación de compuestos orgánicos e inorgánicos integrados y ordenados, de tal manera que forman la materia necesaria para que se realicen con precisión los distintos procesos funcionales que son esenciales para la vida. Entre los principales elementos que forman el cuerpo de los seres vivos destacan cuatro, éstos son: carbono (C), hidrógeno (H), oxígeno (O) y nitrógeno (N).

Por su constitución, los compuestos pueden agruparse en dos tipos: orgánicos e inorgánicos. Los orgánicos se caracterizan porque en su composición interviene el carbono, además de otros elementos. Los compuestos en cuya composición no aparece este elemento se llaman inorgánicos. Hay algunas excepciones: por ejemplo, el dióxido de carbono (CO_2) es un compuesto inorgánico, aunque en su composición aparezca el carbono.

Los compuestos inorgánicos que están presentes en los seres vivos son el agua y las sales minerales. Los orgánicos son los carbohidratos, los lípidos, las proteínas y los ácidos nucleicos

A. Compuestos inorgánicos .

El hidrógeno y el oxígeno se combinan entre sí para constituir el componente celular más abundante: el agua (H2O). Más del 90% del plasma de la sangre es agua; el músculo contiene alrededor del 80% y la mayoría de los tejidos, tanto de las plantas como de los animales, contiene más del 50%. De esta manera, el agua desempeña una función importante en todas las reacciones químicas que ocurren en los seres vivos. Por ser el componente celular más importante, el agua es un compuesto indispensable para la vida. Los nutrientes que la célula consume, el oxígeno que emplea para oxidarlos y sus propios productos de desecho son transportados por el agua. Las sales minerales están constituidas por elementos como el calcio, sodio, potasio, cloro y magnesio. Estas sustancias se encuentran en pequeñas proporciones en los organismos vivos, pero las funciones que desempeñan son de vital importancia, por ejemplo, son necesarios para que se lleven a cabo los procesos de digestión, respiración y nutrición.

Como las sales son muy solubles en agua, se encuentran con facilidad en casi todos los cuerpos de los seres vivos, el suelo o encontrarse como sales en el agua de mar. Los minerales son absorbidos en forma de iones por las raíces de las plantas. Como la mayor parte de los animales, la gente depende de las plantas verdes, que sirven de nexo con éstos compuestos inorgánicos. Las plantas organizan compuestos en los alimentos que la gente usa como fuentes de energía y materiales de construcción.

B. Compuestos orgánicos:

De acuerdo con su estructura física, su composición química y los grupos funcionales que contienen, se clasifican en: Glúcidos o hidratos de carbono, lípidos, proteínas y ácidos nucleicos.

- **Glúcidos:** Se trata de compuestos orgánicos cuyas moléculas están compuestas por C, O, H; y su estructura química es homogénea. La proporción de átomos de hidrógeno y átomos de oxígeno es de 2 – 1 como en el agua. Todos tienen un *grupo alcohol*, y además, bien *grupos aldehído* (aldosas) bien *grupos cetona* (cetosas). Sus funciónes son energética y estructural.

El número de átomos de C va de 3 a cientos de ellos. Los más sencillos son los azúcares simples o **monosacáridos**, entre los cuales están las triosas C3H6O3 (gliceraldehído), pentosas C5H10O5(ribosa) y hexosas C6H12O6 (Glucosa, fructosa y galactosa). Éstas últimas son azúcares simples muy conocidos e importantes en biología. La glucosa elaborada por las células de las plantas verdes es el principal combustible tanto en células vegetales como animales. La fructosa y galactosa, también se fabrican en células de las plantas verdes; son similares a la glucosa. Aunque las tres tienen 6 átomos de carbono y una fórmula molecular $C_6H_{12}O_6$; sus fórmulas estructurales son diferentes.

Los compuestos formados de dos a ocho o nueve unidades de monosacáridos se llaman **oligosacáridos**. Los oligosacáridos más importantes en el metabolismo son los compuestos de dos azúcares o **disacáridos**. Los disacáridos tienen una fórmula molecular $C_{12}H_{22}O_{11}$. Resultan de la combinación de dos azúcares simples y la liberación de una molécula de agua. Así tenemos, el azúcar común o sacarosa (fructosa + glucosa), el azúcar de la leche, lactosa (galactosa + glucosa) y maltosa (glucosa + glucosa), azúcar de malta, un producto de la degradación del almidón.

Los **polisacáridos**, están formados por largas cadenas de monosacáridos como la glucosa. Ejemplo : celulosa ,almidón y glucógeno. La celulosa está presente en células vegetales. Aproximadamente 2000 unidades de glucosa poco ramificadas. La celulosa forma una estructura fibrosa y fuerte en las paredes celulares de las plantas que la contienen que la mayoría de los animales no la pueden digerir. El almidón es muy insoluble, almacena reservas de glucosa. Propio de células vegetales como las del maíz, arroz, papa, trigo, etc. El glucógeno, muy parecido al almidón, pero las moléculas están mucho más ramificadas. Almacén reserva de glucosa en las células animales. Se produce en el hígado y se almacena en él y en los músculos. Cuando se necesita combustible extra, el hígado convierte el glucógeno en glucosa. Además de su función estructural y de reserva, los polisacáridos sirven como lubricantes y amortiguadores, participan en los sistemas inmunológicos y son fuente de oligo y monosacáridos.

Cuando los animales usan carbohidratos en su alimentación, las moléculas se rompen formando otra vez azúcares sencillos. Deben agregarse moléculas de agua para que esto suceda. Éste proceso se llama hidrólisis.

- **Lípidos o grasas**:

Se llama lípidos a un grupo bastante heterogéneo de moléculas compuestas por C, O, H. sin embargo en los lípidos la relación entre los átomos de hidrógeno y los de oxígeno es mucho mayor que de 2 a 1. Los bloques de construcción usados para formar las grasas son los ácidos grasos y el glicerol. Su único rasgo común claro es el ser *hidrófobos* (poco solubles en agua), aunque sí se disuelven en disolventes orgánicos (éter, cloroformo, benceno...). Son componentes estructurales de la membrana, aunque también tienen una función energética. Es difícil clasificarlos, uno de los criterios más útiles se basa en su estructura: lípidos complejos y lípidos sencillos.

Lípidos complejos: tienen como componentes ácidos grasos + otra molécula. Los ácidos grasos están constituidos por una cadena hidrocarbonada con un grupo carboxilo terminal. Si hay algún doble

enlace se dice que están insaturados o no saturados, si solo son enlaces simples entre carbonos se dice que están saturados.
Los ácidos grasos insaturados (propios de los vegetales), se funden a temperaturas bajas, por eso son líquidos a temperatura ambiente (aceites vegetales). Los ácidos saturados (propios de los animales), se funden a temperaturas más altas, por eso son sólidos a temperatura ambiente (mantecas). Hay 4 tipos:

- **Acilglicéridos**: ácido graso+glicerina. Función energética
- **Fosfoglicéridos**: ácido graso+fosfoglicerina. Función estructural de la membrana celular
- **Esfingoglicéridos**: ácido graso+esfingosina. Estos compuestos están relacionados con la transmisión del impulso nervioso e intervienen en mecanismos de inmunidad.
- **Ceras**: ácido graso+un alcohol. Función de protección

Los acilglicéridos contienen 1, 2 ó 3 moléculas de ácido graso, que se unen a la glicerina. Los **triglicéridos** (acilglicéridos con 3 moléculas de ácido graso) es lo que se conoce vulgarmente como *grasa*. Ésta forma depósitos energéticos, concentrados en las *células adiposas* de los animales. Las grasas constituyen una importante reserva de alimento.

Lípidos sencillos: no contienen ácidos grasos y son mucho menos abundantes. Destacan los **esteroides**: presentes en animales y vegetales. Se los clasifica como lípidos por ser hidrófobos. Hay muchos tipos según los grupos funcionales:

- **Colesterol**: esteroide presente en la membrana celular, en el plasma... Aparece sólo en animales, no tiene valor energético, pero si estructural. Su acumulación puede reducir la flexibilidad de los vasos sanguíneos. También hay esteroides que son **vitaminas**, **hormonas sexuales**...
- **Las Proteínas**:

Las proteínas son compuestos a base de carbono, hidrógeno, oxígeno, nitrógeno y generalmente azufre y fósforo. El elemento característico es el nitrógeno. La molécula de proteína está formada por componentes más simples: los **aminoácidos.** Hay cerca de 20 aminoácidos comunes; cada uno contiene un grupo amino y un grupo de ácido orgánico. Una de éstas uniones se usa para enlazar el átomo de hidrógeno. El segundo enlace se usa para unir el grupo amino y el tercero para unir el grupo ácido. El grupo amino contiene 2 átomos de hidrógeno y un átomo de nitrógeno (-NH). El grupo ácido orgánico contiene 1 átomo de carbono, 2 de oxígeno y 1 de hidrógeno (COOH). La cuarta unión se usa para unir al grupo "R", que representa al resto de la molécula. Es la identidad "R" lo que hace que los aminoácidos sean diferentes unos de otros.

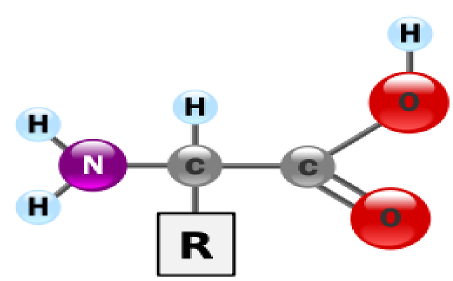


Figura 1. Estructura básica de un aminoácido .
Fuente: http://es.wikipedia.org/wiki/Aminoácido

Los aminoácidos pueden unirse por medio de síntesis por deshidratación. Un OH del grupo ácido de un aminoácido se une a un H de un grupo amino de otro aminoácido. El H y el OH forman una molécula de agua constituyéndose una unión C-N entre los dos aminoácidos. La unión C -N se llama **enlace peptídico**. De ésta manera, se unen dos aminoácidos para formar la molécula de un dipéptido. Pueden agregarse aminoácidos adicionales a las moléculas de dipéptido, formando cadenas llamadas polipéptidos. Cada vez que un aminoácido se une a la cadena se elimina una molécula de agua, constituyéndose una unión de proteínas que son polipéptidos grandes y complejos.

Los aminoácidos son las "letras" que forman las "palabras" de de la proteína. Una sola molécula de proteína puede tener tan pocas como 50 y tantas como 3000 unidades de aminoácidos. Pueden estar arregladas en cualquiera del gran número de posibles secuencias. El número de posibles combinaciones de aminoácidos es asombroso..

Una proteína va a depender del orden, de la cantidad de aminoácidos y de la disposición tridimensional. Los cambios en estas condiciones se conocen como **desnaturalización** de la proteína. Estos cambios pueden producir la inactivación funcional de la proteína. Pueden ser de tipo físico o de tipo químico: temperatura, pH... La desnaturalización es un proceso reversible cuando el cambio es leve y de poca duración, si es largo e intenso es irreversible.

Las proteínas tiene función estructural, ya que forman el material del que está hecho el organismo y funcional, porque llevan a cabo diferentes funciones, por ejemplo, catalíticas, de transporte, de defensa, hormonales, contráctiles, etcétera.

- **Ácidos nucleicos:**

Son macromoléculas, polímeros cuyos monómeros son los *nucleótidos*. El nucleótido está formado por un azúcar de cinco carbonos (ribosa o desoxirribosa), un grupo fosfato (H3PO4) y una base nitrogenada, sea una purina de doble anillo o una pirimidina de anillo simple. Existen dos variedades de ácidos nucleicos; ácidos ribonucleicos (RNA) y ácidos desoxirribonucleicos (DNA). El DNA contiene las purinas adenina(A), guanina(G), y las pirimidinas: citosina(C) y timina (T), junto con el azúcar desoxirribosa y el fosfato. El RNA contiene las purinas adenina y guanina y las pirimidinas citosina y uracilo (U) junto con el azúcar ribosa y el fosfato.

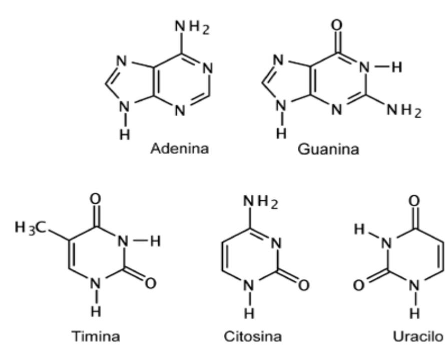


Fig. 2. Estructura de las bases nitrogenadas

Ambos participan en la transmisión de información hereditaria y en la determinación de las proteínas que una célula debe producir. El DNA forma genes, el material hereditario de las células, y contiene instrucciones para la producción de todas las proteínas que el organismo necesita. Hay tres tipos de RNA: RNA mensajero (RNAm), RNA de transferencia (RNAt) y RNA ribosómico (RNAr) que actúa en el proceso de síntesis de proteínas. Al igual que las proteínas, los ácidos nucleicos son grandes y complejas moléculas. Fueron aisladas por primera vez en el núcleo celular.

RESUMEN

- Entre los principales elementos que forman el cuerpo de los seres vivos se mencionan cuatro, éstos son: carbono , hidrógeno , oxígeno y nitrógeno .
- El componente celular más abundante es el agua (H2O).
- El agua desempeña una función importante en todas las reacciones químicas que ocurren en los seres vivos.
- Los nutrientes que la célula consume, el oxígeno que emplea para oxidarlos y sus propios productos de desecho son transportados por el agua.
- Las sales minerales están constituidas por elementos como el calcio, sodio, potasio, cloro y magnesio. Estas sustancias se encuentran en pequeñas proporciones en los organismos vivos, pero las funciones que desempeñan son de vital importancia.
- Los compuestos orgánicos más importantes son**:** Glúcidos o hidratos de carbono, lípidos, proteínas y ácidos nucleicos.
- Los hidratos de carbono más sencillos son los azúcares simples o **monosacáridos.**
- Las hexosas como la glucosa, fructosa y galactosa son los azúcares simples más conocidos y de importancia biológica.
- Las funciones de los hidratos de carbono son energética y estructural.
- Las grasas constituyen una importante reserva de alimento.
- Los bloques de construcción usados para formar las grasas son los ácidos grasos y el glicerol.
- Las proteínas son compuestos a base de carbono, hidrógeno, oxígeno, nitrógeno y generalmente azufre y fósforo.
- Los componentes más simples de las proteínas son los aminoácidos, los cuales se unen por medio de enlaces peptídicos.
- Los ácidos nucleicos son macromoléculas, polímeros cuyos monómeros son los nucleótidos. Están formados por un azúcar de cinco carbonos, un grupo fosfato y una base nitrogenada.

EVALUACIÓN FORMATIVA

El texto cognitivo y tu investigación personal te debe haber capacitado para responder a las siguientes preguntas:

1- Cuál es la importancia del agua para la vida?

2- ¿Cuáles son los elementos más abundantes en los seres vivos?

3- ¿Cuáles son los compuestos

orgánicos cuyas unidades básicas son los aminoácidos?
4- ¿Cuáles son las unidades de construcción de los carbohidratos?
5- Cuando se pierden los elementos del agua al unirse los bloques de construcción en una molécula grande, ¿Qué tipo de reacción se efectúa?
6-¿ Cuáles son los compuestos orgánicos que son insolubles en agua y que contienen C, H y O?
7- Señala con una x los comestibles que contienen hidratos de carbono, de ser posible anota el carbohidrato que contienen.
___ Leche ______________
___ Huevo __________________
___ Lechuga ____________
___ Pan de trigo ______________
___ Miel de abeja ________
___ Frijol ___________________
___ Arroz ______________
___ Papa ____________________
___ Lentejas ____________
___ Azúcar __________________
8- ¿Cómo se llaman los azúcares de 5 carbonos?
9-Compara las bases púricas con las pirimidínicas y anota las semejanzas y las diferencias entre ellas.

UNIDAD 3. CARACTERÍSTICAS Y NIVELES DE ORGANIZACIÓN DE LOS SISTEMAS VIVIENTES

Presentación

La biología es la ciencia que estudia los seres vivos; pero se ha preguntado usted ¿que es lo vivo? Empleamos la palabra organismo para designar cualquier ser vivo, vegetal o animal. No resulta difícil darse cuenta que un hombre, un roble, o un gusano son seres vivos, en tanto las piedras y las rocas no lo son; pero resulta difícil saber si otras partículas tienen vida o no, como es el caso de los virus; los cuales presentan algunas de las características de los seres vivos, pero no todas.

La presente unidad de aprendizaje presenta de manera resumida las propiedades de los seres vivos como *metabolismo*, *irritabilidad*, *crecimiento*, *reproducción* y *adaptación, etc.*, así como también los niveles de organización de los sistemas vivientes, desde el nivel molecular y celular hasta la formación de biomas que constituye en conjunto la biósfera. Seguidamente encontrarás un texto cognitivo, que analizado en forma independiente o grupal, te permitirá apropiarte de los conocimientos básicos o fundamentales para el estudio de la biología.

Objetivos generales

- Analizar las características generales de los seres vivos.
- Distinguir los niveles de organización

de los sistemas vivientes.

Objetivos específicos

- Diferenciar los seres vivos de la materia no viva.
- Explicar los niveles de organización de los sistemas vivientes y dar ejemplos de cada uno de ellos.

A. Características de los seres vivos

La mayoría de los seres vivos u organismos pueden distinguirse fácilmente de la materia no viva, no así, algunas formas de vida inferior. Los seres vivos presentan seis importantes características que lo diferencian de la materia sin vida.

- *Metabolismo*. En los organismos tiene lugar una serie compleja de procesos químicos importantes para digerir y asimilar nutrientes; así como para la producción y gasto de energía.
- *Crecimiento*. Los seres vivos crecen por desarrollo de nuevas partes; este crecimiento por instrospección (adición interna) es propio de seres con vida.
- *Irritabilidad*. Los seres vivos reaccionan a cambios ambientales; la respuesta varía de un organismo a otro y, por lo general, no es permanente.
- *Reproducción*. Cada tipo de organismo vivo tiene la capacidad de reproducirse, es decir, tener descendencia.
- *Forma y tamaño*. Cada organismo presenta una forma y un tamaño característico.
- *Composición química*. Los organismos vivientes están constituidos principalmente de cuatro elementos químicos: carbono, hidrógeno, oxígeno y nitrógeno, en proporciones variadas pero definidas. Estos elementos forman los principales componentes del protoplasma animal o vegetal.

Cabe señalar que ciertos organismos como bacteriófagos y virus, merecen ser considerados tanto por sus características como en su composición, como un grupo separado, no acorde con las características mencionadas anteriormente.

Berenstein (1998), incluye otras características como señales de la vida además de las antes mencionadas.

a) Organizado en una manera compleja.
b) Mantiene un ambiente interno particular.
c) Adquiere y usa energía para hacer trabajo.
d) Responde a estímulos.
e) Mueve por lo menos parte de su cuerpo.
f) Crece y se desarrolla.
g) Se reproduce.
h) Posee adaptaciones a su ambiente local.

B. Niveles de organización de los sistemas vivientes

Las cosas vivientes están altamente organizadas. Los científicos han definido los siguientes modelos de organización.

- *Nivel molecular*. Representan asociaciones estrechas de átomos en forma precisa y las cuales forman los compuestos.
- *Nivel celular*. Representan organismos formados por asociaciones de células independientes o que funcionan como una sola célula. Por ejemplo, protozoarios, esponjas.
- *Nivel tisular*. Representan organismos

cuyo funcionamiento depende de agrupaciones celulares con igual función.

- *Nivel orgánico*. Representan organismos cuyo funcionamiento depende de estructuras que agrupan diferentes tejidos; estructuras que presentan diferentes funciones.
- *Nivel de sistema de órganos*. Se refiere a organismos cuyo funcionamiento lo realizan un grupo de órganos en forma coordinada.

El *organismo*, en su totalidad representa el siguiente elevado nivel de organización, pero éste no es el punto final. Al igual que las células, los tejidos y los órganos, los organismos se pueden agrupar. Los grupos de organismos que se pueden interfecundar en forma natural se denominan *poblaciones*. Las diferentes poblaciones viven juntas en *comunidades* y muchas comunidades con las mismas formas de vida constituyen un *bioma*. Todos los biomas del mundo constituyen el complejo nivel de organización, la *biosfera*, que es el área total de vida.

RESUMEN

- Los seres vivos poseen varias características que los distinguen de la materia no viva. Ellos metabolizan, son irritables, interactúan con el medio que los rodea, crecen, se reproducen y mueren.
- Los seres vivos están altamente organizados. Se parte del nivel molecular luego el celular. La célula es la unidad básica estructural de los seres vivos.
- Algunos organismos como protozoarios y esponjas, están ubicadas en el nivel celular de organización.
- Después del nivel celular está el tisular, el orgánico y el sistema de órganos.
- El organismo en su totalidad constituye un nivel superior de organización, seguido por las poblaciones, comunidades, biomas hasta el complejo nivel de organización "*biosfera*".

ACTIVIDADES

Después de haber estudiado en forma analítica las características y niveles de organización de los sistemas vivientes, estás en capacidad de realizar la siguiente evaluación.

- ***Evaluación formativa***

1. Enumere y examine las características de los seres vivos.
2. Explique cómo se organizan los seres vivos en la naturaleza?

3- ¿Estás de acuerdo con la organización presentada en el texto cognitivo? De no ser así, haz tus sugerencias.

UNIDAD 4.
ESTRUCTURA Y FUNCIONAMIENTO DE LAS ORGANELAS CELULARES

Presentación

Un organismo se compone de unos cien billones de células, y cada una de ellas es indescifrablemente compleja. Para ilustrar dicha complejidad, la revista Newsweek comparó la célula con una ciudad amueblada, "*Hay centrales energéticas que generan la energía en la célula; fábricas que producen proteínas, las unidades fundamentales del comercio químico; sistemas complejos de transportación que conducen a las sustancias químicas específicas de un punto a otro de la célula y fuera de ella; centinelas parapetados que controlan los mercados de transportación e importación y vigilan el mundo exterior en busca de señales de peligro; disciplinando ejércitos biológicos listos para luchar contra los invasores, y un gobierno genético que mantiene el orden*". *¡Depertad! 22-oct-1995.*

¿A qué corresponde cada una de estas semejanzas? Si te es difícil dar una respuesta, el siguiente texto cognitivo te ayudará a responder a esta interrogante.

La unidad de aprendizaje comprende la estructura y funcionamiento de los organoides celulares de manera resumida. La información podrás ampliarla en los libros de consulta sugeridos en la bibliografía.

Objetivo general

Analizar la estructura y función celular.

Objetivos específicos

- Establecer las diferencias entre una célula procariota y una eucariota.
- Analizar la estructura de las células eucariotas típicas y la función de sus organoides celulares.

Organización celular

La *célula* puede ser definida como la unidad mínima estructural y funcional de materia viviente que presenta continuidad genética. La primera célula fue observada por Roberto Hoocke en 1665. Posteriormente se descubrió la celularidad de muchos organismos con el uso del microscopio de luz y se propuso, además, la *Teoría Celular*, la cual se atribuye a Mathias Schleiden (1838) y Theodor Schwann (1839), presentado los siguientes postulados:

- Todos los seres vivos están integrados por células y productos celulares.
- Toda célula proviene de células preexistentes.
- Existen similitudes en los constituyentes químicos y el metabolismo de las células.
- La actividad de un organismo, como un todo, puede entenderse como el conjunto de actividades colectivas e interacciones de sus unidades celulares interdependientes.

Existe una enorme variedad de células; el ser humano tiene aproximadamente 100 tipos de células distintos y se les puede agrupar en unos cuantos modelos básicos. Una forma de células: *eucariotas* o *procariotas*. La célula *procariota* es generalmente más pequeña que la eucariota y carece de membrana nuclear. Además, no presenta organelas membranosas. Ello puede observarse en las bacterias y algas verdes-azules (cianobacterias); las cuales se agrupan dentro del reino monera.

Las células eucariotas se encuentran presentes en los reinos protista, fungi, animal y vegetal. Esta célula posee membrana nuclear y numerosas organelas membranosas. Las células vegetales se diferencian de las animales por presentar adicional a la membrana celular una pared rígida externa de celulosa llamada pared celular. Esta pared evita cambios en su forma y posición. Además las células vegetales contienen plastidios, estructuras delimitadas por una membrana que producen y almacenan alimento. Los más comunes y abundantes son los cloroplastos. Carecen de ciertos organelos complejos como son centriolos y lisosomas.

La mayoría de las células son microscópicas; siendo para la célula animal de 15 micrómetros (μm) en promedio y de 40 μm para la célula vegetal. Su forma varía según la función que realice y se encuentran delimitadas por la membrana celular. El material que se ubica entre la membrana y el núcleo se conoce como *citoplasma;* y en el mismo se ubican organelas que se pueden clasificar en la siguiente forma:

- Organelas relacionadas con microtúbulos: centríolos, cilios y flagelos.
- Organelas membranosos: complejo de Golgi, retículo endoplasmático, vacuolas, lisosomas, mitocondrias y cloroplastos.

El líquido intracelular es el *citosol*; el cual está formado principalmente por agua, aminoácidos, azúcares, enzimas, proteínas estructurales e iones como: sodio, potasio, magnesio, manganeso y cloro, entre otros.

Estructura celular: Analizaremos cada una de las estructuras que constituyen la célula por separado:

Membrana celular:
Es la capa más externa que delimita la célula y la protege de su medio ambiente. Es una estructura dinámica, es decir que no es rígida, sino que ella puede cambiar de acuerdo a las condiciones del medio. Regula el paso de sustancias hacia el interior o exterior de la célula, es decir, controla de manera selectiva la entrada y salida de materiales a la célula; además participa en el mecanismo de reconocimiento celular y comunica las células por medio de proteínas receptoras que se fijan en su superficie. Se pensaba que estaba formada por una bicapa de lípidos y una capa intermedia de proteínas (Modelo de Dawson-Danielli). Actualmente, gracias a los estudios de microscopia electrónica, Singer y Nicholson propusieron el Modelo del Mosaico Fluido; el cual explica mejor la naturaleza dinámica de las proteínas en el modelo. Según

este modelo, las proteínas pueden ubicarse extrínseca e intrínsecamente; las estructuras primarias y terciaria son congruentes con la posición de ellas en la membrana. Además, los fosfolípidos y las proteínas tienen capacidad de movimiento lateral; y en casi todas las membranas celulares animales se presentan glucoproteínas que forman un glucocáliz que interviene en reacciones inmunológicas y receptores, a los cuales se fijan sustancias que regulan la actividad celular. Otros de los procesos en los que participa la membrana celular son *endocitosis*, *fagocitosis*, *pinocitosis* y *exocitosis*.

En las células animales la membrana plasmática está reforzada por una cubierta celular formada por proteínas, grasas y carbohidratos, la cual facilita que las células se reconozcan entre sí, para que se asocien y formen tejidos.

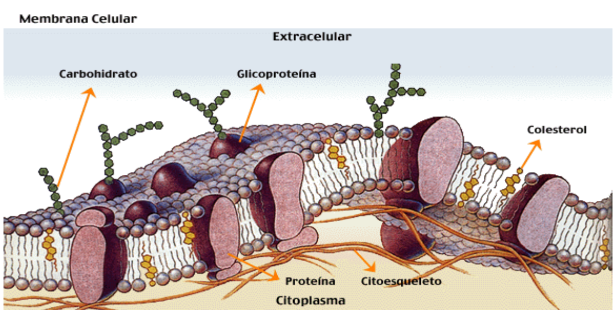


Fig.3 Representación esquemática de la estructura de la membrana celular. Tomado de monografías .com/trabajo 42/ membranas celulares.

Mecanismos de transporte a través de la membrana:
La célula necesita expulsar de su interior los desechos del metabolismo y adquirir nutrientes del líquido extracelular, gracias a la capacidad de la membrana celular que permite el paso o salida de manera selectiva de algunas sustancias. Esto quiere decir que sólo ciertos tipos de sustancias pueden atravesar ésta con facilidad. El paso de una sustancia a través de la membrana puede verse afectado por:

a- El tamaño de la molécula: Generalmente las moléculas grandes no pueden pasar con facilidad la membrana.

b- La solubilidad de la membrana: Las moléculas solubles en grasa o liposolubles pasan con facilidad la membrana; mientras que las solubles en agua o hidrosolubles lo hacen con mucha dificultad.

c- La carga de las moléculas: generalmente las moléculas con cargas o iones pasan con mucha dificultad la membrana, principalmente aquellas con cargas positivas que repelen a éste tipo de moléculas.

El transporte de sustancias a través de la membrana de acuerdo a la energía involucrada en su movimiento es de dos tipos: pasivo y activo.

Transporte pasivo o difusión: El transporte pasivo se cumple a través de los componentes de la bicapa lipídica o a través de estructuras especiales, constituídas por proteínas transmembranosas organizadas para el paso de los solutos; estas estructuras son de dos tipos: los canales iónicos y las permeasas, llamadas también transportadores carriers (en inglés). El transporte pasivo no necesita de energía por parte de la célula, para el intercambio de materiales a través de la membrana celular. Existen dos tipos de difusión a través de la membrana celular que son:

Difusión simple: Es el movimiento cinético de moléculas o iones a través de la membrana sin necesidad de fijación con proteínas portadoras de la bicapa lipídica. Así entran moléculas lipídicas como las hormonas, esteroides, anestésicos, fármacos liposolubles, sustancias apolares (O_2, N_2), polares pequeñas (H_2O, C_2H_5OH, glicerina). Este tipo de transporte se puede realizar a través de mecanismos fisicoquímic**os** como la **ósmosis,** la **diálisis** y a través de canales o conductos que puede regirse por: Permeabilidad selectiva de los diferentes conductos proteínicos y por mecanismo de compuerta de los conductos proteínicos.

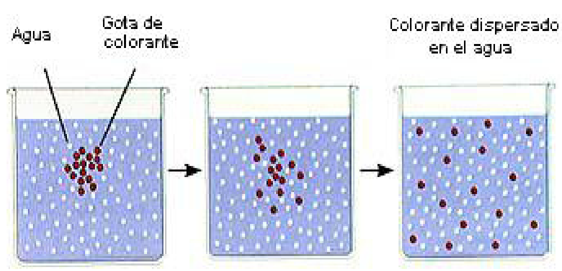


Fig. 4. Difusión

Osmosis. Este tipo de difusión se caracteriza por el movimiento del solvente, en la mayoría de los casos el agua, del área de mayor hacia la menor concentración a través de una membrana semipermeable. La fuerza del movimiento de osmosis se mide usando la presión osmótica. De acuerdo a la concentración del medio que baña la célula, éste puede ser: hipertónico, hipotónico e isotónico.

Las soluciones hipertónicas son aquellas, que con referencias al interior de la célula, contienen mayor cantidad de solutos (y por lo tanto menor potencial de agua). Las hipotónicas son aquellas, que en cambio contienen menor cantidad de solutos (o, en otras palabras, mayor potencial de agua). Las soluciones isotónicas tienen concentraciones equivalentes de sustancia y, en este caso, al existir igual cantidad de movimiento de agua hacia y desde el exterior, el flujo neto es nulo. En medios hipertónicos, la célula perderá agua, denominándose a éste fenómeno **plasmólisis o deshidratación**, en medios hipotónicos la célula ganará agua denominándose a este proceso **turgencia** (presión de turgor)

Diálisis: Este tipo de difusión se caracteriza por el movimiento del soluto del área de mayor hacia la menor concentración a través de una membrana semipermeable.

Difusión facilitada:
También se llama difusión mediada por portador porque la sustancia transportada de esta manera no suele poder atravesar la membrana sin una proteína portadora específica que le ayude. Se diferencia de la difusión simple a través de conductos en que mientras que la magnitud de difusión simple se incrementa de manera proporcional con la concentración de la sustancia que se difunde, en la difusión facilitada la magnitud de difusión se aproxima a un máximo (Vmax), al aumentar la concentración de la sustancia.

Transporte Activo: Consiste en el transporte de sustancias **en contra de un gradiente de concentración**, lo que requiere un **gasto energético**.

Transporte activo primario: Bomba de sodio y potasio
Se encuentra en todas las células del organismo, encargada de transportar iones sodio hacia el exterior de las células y al mismo tiempo bombea iones potasio desde el exterior hacia el interior, lo que produce una diferencia de concentración de sodio y potasio a través de la membrana celular que genera un potencial eléctrico negativo dentro de las células, muy importante en el impulso nervioso.

Transporte activo secundario o cotransporte:

- Es el transporte de sustancias muy concentradas en el interior celular como los aminoácidos y la glucosa, cuya energía requerida para el transporte deriva del gradiente de concentración de los iones sodio de la membrana celular.

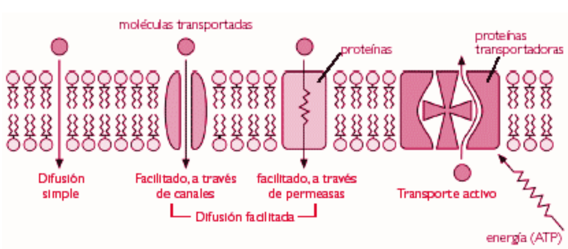


Fig. 5 Formas de transporte a través de la membrana. Tomado de edu. jccm.es/ies/…/transporte_membrana. htm

Bomba de calcio: Está constituída por una proteína de la membrana celular de todas las células eucariotas. Transporta calcio iónico (Ca2+) hacia el exterior de la célula, gracias a la energía proporcionada por la hidrólisis de ATP, con la finalidad de mantener la baja concentración de Ca2+ en el citoplasma que es unas diez mil veces menor que en el medio externo, permitiendo el normal funcionamiento celular. Se sabe que las variaciones en la concentración intracelular del Ca2+ se producen como respuesta a diversos estímulos y están involucradas en procesos como la contracción muscular, laexpresión genética, la diferenciación celular, la secreción, y varias funciones de las neuronas. Dada la variedad de procesos metabólicos regulados por el Ca2+, un aumento de la concentración de Ca2+ en el citoplasma puede provocar un funcionamiento anormal de los mismos. Si el aumento de la concentración de Ca2+ en la fase acuosa del citoplasma se aproxima a un décimo de la del medio externo, el trastorno metabólico producido conduce a la muerte celular.

Transporte citoquímico o de macromoléculas o partículas:
Se refiere al transporte de grandes moléculas o partículas y se puede dar por dos modalidades básicas: Exocitosis y endocitosis.

Exocitosis: Movimiento de materiales hacia el exterior de una célula envolviendo el material en una bolsa membranosa que se desplaza hacia la superficie de la célula, se funde con la membrana plasmática y se abre hacia el exterior, permitiendo que su contenido se difunda inmediatamente.

Endocitosis:
Es la ingestión de macromoléculas con la formación en el interior de la célula de vesículas procedentes de la membrana plasmática. La endocitosis incluye la **fagocitosis** (entrada de partículas) y la **pinocitosis** (entrada de líquido).

Por medio de la fagocitosis algunas células rodean con su membrana plasmática transformada en los llamados pseudópodos las partículas extracelulares o macromoléculas y la introducen al interior de la célula en forma de una vesícula la cual se fusiona posteriormente con los lisosomas que degradan la sustancia fagocitada. La fusión de la vesícula con el lisosoma recibe el nombre de **fagosoma**. La pinocitosis permite a determinadas células y organismos unicelulares obtener líquidos orgánicos del exterior para alimentarse o para otro fin. Se puede observar en células especializadas en la función nutritiva, por ejemplo las de la mucosa intestinal.

De ésta manera pasan de la luz del intestino al torrente sanguíneo las grasas que son insolubles.

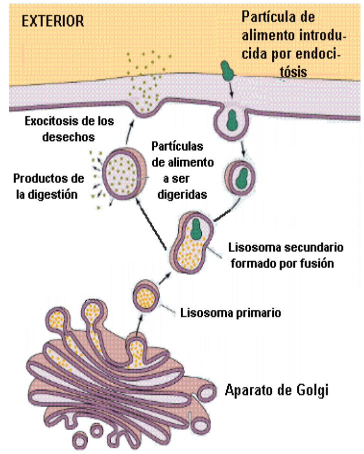


Fig. 6 Transporte citoquímico

Endocitosis mediado por receptor: Es un tipo de endocitosis muy específico, ya que las sustancias o ligandos introducidas se unen a los receptores, la membrana celular que contiene estos receptores se invagina y forma una vesícula con la unión de ligando receptor. Así se introducen en el interior de las células, las lipoproteínas que se unen a su receptor.

Transporte intracelular:
El transporte de biomoléculas en el interior de la célula es realizado por las corrientes citoplasmáticas, o por el retículo endoplasmático que contiene canales citoplasmáticos cubiertos de membranas, que comunican al aparato de Golgi con el núcleo y otras estructuras celulares.

Pared celular: Envoltura gruesa y rígida que rodea a las células vegetales. Da forma, rigidez, e impide su ruptura, evitando que la célula se hinche debido a la alta concentración osmótica de moléculas. Sus componentes glucídicos son secretados por la célula. Está formada por una red de fibras de celulosa y una matriz en la que hay agua, sales minerales, hemicelulosa y pectina. La misma es permeable a la mayoría de las sustancias; situación opuesta a nivel de la membrana celular.

***Organelos citoplasmáticos*: estructura y función**

Núcleo: Es un cuerpo redondo u ovalado, situado cerca o en el centro de la célula. Presenta una doble membrana la cual se fusiona en ciertas zonas y forma poros que sirven de salida a sustancias del núcleo. Se piensa que estos poros se conectan con el retículo endoplasmico. Presenta además cromosomas ligados a proteínas básicas (histonas), los cuales se hacen visibles durante la mitosis. Además, presenta nucleolos, encargados de producir ribosomas; usualmente existen 1 ó 2 en cada célula. El núcleo es, pues, el centro regulador de todas las actividades celulares; desempeña un papel fundamental durante la división celular. El núcleo es el centro principal de fabricación de los ácidos ribonucleicos y desoxirribonucleicos.
El núcleo es el centro regulador de todas las actividades celulares

Centríolos: Son constituyentes regulares de la célula animal; los cuales sirven como centro de síntesis de las fibras del huso mitótico. Cada centríolo presenta dos cilindros de 0.15 μm, de diámetro por 0.3 a 0.5 μm de largo. Cada cilindro presenta 9 grupos de 3 elementos fibrilares (9+0).

Cilios y flagelos: Son estructuras delgadas que salen de la superficie de muchas células. Externamente están cubiertas de una membrana e internamente presentan un anillo de nueve grupos dobles de microtúbulos que rodean a un par central (9+2). Los cilios son más cortos que los flagelos y sólo se presentan en las células animales.

Complejo de Golgi: Está formado por una serie de membranas paralelas y continuas que forman unas vesículas aplanadas que continúan al retículo endoplasmático. Su principal función es almacenar, modificar y empacar proteínas. Se presenta en casi todas las células, excepto en los glóbulos rojos. En células vegetales se piensa que contribuyen a la formación de la pared celular.

Retículo endoplasmático: Es una serie de conductos membranosos que atraviesan el citoplasma de la mayoría de las células eucariotas. Forma una red continua que se prolonga desde la membrana celular hasta la membrana nuclear. En muchas secciones de la célula se asocia con unos pequeños gránulos denominados ribosomas, que le dan un aspecto rugoso al retículo. Esta región se asocia a la actividad de síntesis de proteínas; mientras que el retículo liso interviene en la síntesis y almacenamiento de lípidos.

Ribosomas: Son cuerpos esféricos de 0.25μm de diámetro; los cuales están formados por dos subunidades, constituidas de 65% rRNA y 35% proteínas. Representan el sitio de síntesis de proteínas al agruparse muchos de ellos (*poliribisomas*).

Vacuolas: Son estructuras muy voluminosas en células vegetales y protistas; si están en células animales son muy pequeñas. Su contenido lo forman agua, azúcares y sales; ocupando en células vegetales casi todo el citoplasma. Su función es el intercambio de material entre el medio y la célula.

Lisosomas: Son vesículas membranosas que almacenan enzimas hidrolíticas que provocan la lisis celular.

Peroxisomas: Similares a los lisosomas, pero éstos tienen funciones oxidativas; intervinienen en la desaminación oxidativa de aminoácidos.

Microfilamentos: Son finos hilos citoplasmáticos formados por proteínas como actina y miosina. Éstos intervienen en la estructura y movimiento celular, y forman parte del citoesqueleto.

Microtúbulos: Son hilos de 20-30 nm de diámetro y varios micrómetros de longitud, no se ramifican y son elásticos. Están constituidos por tubulina (proteína); y participan en movimientos celulares, como el de los cromosomas durante la división celular (mitosis).

Plastidios: Estructuras membranosas que se encuentran en las células vegetales, los cuales contienen pigmentos o almacenan almidón.
Cloroplastos: Son plastidios con clorofila que solo se encuentran en células vegetales. Poseen su propio ADN y tienen doble membrana; se ubican dentro de la membrana interna en grupo de discos llamados grana, el cual presenta el pigmento verde. La grana se ubica en un estroma vacuolado. La clorofila absorbe energía lumínica la cual es transformada en energía química para producir carbohidratos en un proceso denominado fotosíntesis.

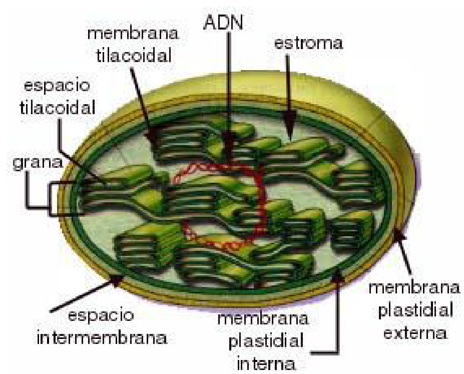


Fig. 7 Estructura de un cloroplasto

Mitocondria: Estructuras ovoides de 0.5µm de diámetro y 1.5 a 2.0 µm de largo. Se encuentran en todas las células eucariotas en cantidades variables. Presentan dos membranas en forma de bolsa; la interna es plegada. Los pliegues forman las crestas mitocondriales, las cuales presentan complejos enzimáticos relacionados con el transporte de electrones. Entre las dos membranas se encuentra un espacio llamado matriz mitocondrial, la cual tiene complejos enzimáticos relacionados al ciclo de Krebs. Posee ribosomas y ADN, lo que le facilita la producción de sus propias proteínas. Su principal función es permitir el metabolismo oxidativo de los carbohidratos y obtener energía en forma de ATP; así como la regulación del metabolismo del calcio dentro de la célula.

Las mitocondrias son las centrales energéticas de la célula. Estas pequeñas organelas liberan la energía que la célula necesita para fabricar compuestos transportar materiales y reproducirse.

RESUMEN

- La célula es la unidad estructural y funcional de todos los seres vivos.
- Todas las células provienen de otras células mediante la reproducción celular.
- Las células eucariotas poseen un núcleo y organelas separados del citoplasma por membranas. Las células procariotas no tienen esta estructura, pero aun así, llevan a cabo todas los procesos vitales.
- La mayoría de las células son microscópicas, su forma varía según su función.
- El citoplasma es el material que se ubica entre la membrana y el núcleo; es allí, donde se ubican las organelas celulares como vacuolas, mitocondrias, centriolos, etc.
- Las vacuolas en las células vegetales, son de mayor tamaño que en las células animales.
- La pared celular está presente en plantas, algas, bacterias y hongos.
- El núcleo es el centro principal de fabricación de los ácidos ribonucleicos y desoxirribonucleicos. Es un centro elaborador de información y el director general de todo el funcionamiento de la célula.
- La membrana controla de manera selectiva la entrada y salida de materiales a la célula.
- El transporte de sustancias a través de la membrana de acuerdo a la energía involucrada en su movimiento es de dos tipos: pasivo y activo.
- Las macromoléculas o partículas grandes se introducen o expulsan de la célula por dos mecanismos: exocitosis y endocitosis.

ACTIVIDAD

Después de haber leído sobre la estructura y función de los organelas celulares, creemos que estás en condiciones de realizar la siguiente evaluación.

Evaluación Formativa

- Explica la teoría celular.
- Compara la célula procariota con la eucariota.
- Nombra y describe las funciones de los organelos celulares.
- Elabora un cuadro sinóptico con la información presentada en esta unidad de aprendizaje.
- Investiga las diferencias entre una célula animal y una vegetal.
- Investiga cómo se realiza el transporte de sustancias a través de la membrana celular.
- Prepara un informe escrito y con dibujos en las cuales se señale con sus nombres, la estructura de cinco clases de células animales o vegetales especializadas.
- Trata de explicar a qué corresponden las semejanzas presentadas al inicio de la unidad.

UNIDAD 5.
LOS PROCESOS METABÓLICOS

Presentación

Los procesos metabólicos son de vital importancia para los seres vivos, sin ellos no se podrían llevar a cabo funciones vitales como crecer, moverse y reproducirse. Las reacciones metabólicas son catalizadas por *enzimas* (proteínas producidas por las células que regulan la rapidez y especifidad de miles de reacciones químicas intracelulares). Los procesos de *fotosíntesis* y *respiración celular* son parte del metabolismo. La *fotosíntesis* es un proceso de formación de moléculas grandes (*anabolismo*). En la *respiración celular* se desdoblan (rompen) moléculas complejas *(catabolismo*). Por medio de la fotosíntesis las plantas verdes aprovechan la energía solar y producen alimento, directa e indirectamente, para casi todas las formas de vida terrestre, a partir de dióxido de carbono, agua y minerales. Por medio de la respiración se libera energía para los trabajos biológicos.

Esto sugiere, que deberías estar interesado en estudiar en detalle estos procesos metabólicos. El acceso, construcción y comprensión de los conocimientos relacionados con los procesos metabólicos serán orientados con base en un texto cognitivo de autoinstrucción.

Objetivo general

Analizar los procesos metabólicos que tienen lugar en los seres vivos.

Objetivos específicos

- Estudiar las diferencias entre anabolismo y catabolismo como fase del metabolismo.
- Determina el papel de las enzimas en los procesos metabólicos.
- Estudiar la fotosíntesis, como ejemplo de anabolismo, y su importancia para la vida.
- Comprender el proceso de respiración celular como ejemplo de catabolismo.

Los procesos metabólicos

Para que una célula pueda llevar a cabo sus funciones vitales (crecer, moverse, reproducirse, etc.), es necesario que dentro de ella se lleven una serie de reacciones químicas que en conjunto reciben el nombre de *metabolismo*. En forma resumida el metabolismo comprende todas las reacciones químicas y físicas que efectúan las células. Para efectos de estudios el metabolismo se divide en dos partes:

a) Anabolismo: fase constructiva, elaboración o síntesis de moléculas grandes a partir de otras más simples, que requieren aporte de energía. Ejemplo, el proceso de fotosíntesis.
b) Catabolismo: Fase degradativa, en donde moléculas complejas son transformadas en otras más simples, a menudo con liberación de energía para el trabajo biológico. Por

ejemplo, durante la respiración celular moléculas grandes (carbohidratos) son degradadas hasta formar moléculas pequeñas (CO_2 y H_2O), con liberación de energía.

Las reacciones metabólicas son producidas por agentes llamados *enzimas* que son sustancias conocidas como catalizadores producidas por las células vivas que regulan la rapidez y la especificidad de miles de reacciones químicas intracelulares, sin modificar el punto final de la reacción y sin consumirse durante la misma sino que pueden emplearse una y otra vez.

El papel de un catalizador como una enzima es reproducir la energía de activación de una reacción y aumentar la población de moléculas con un contenido de energía suficientemente grande para reaccionar.

Si la Energía que se debe suministrar a los reactantes es muy alta, la reacción transcurrirá más lentamente; por eso los **catalizadores**, al variar la energía de activación de las reacciones, modifican su velocidad.

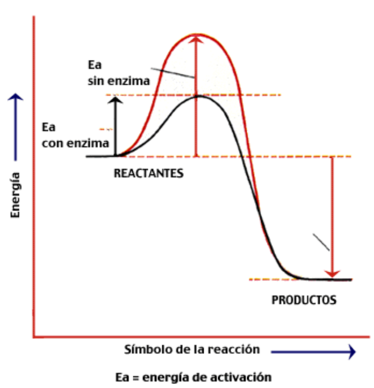


Fig. 8. Energía de activación

En una reacción catalizada por enzima (E), los reactivos se denomina **sustratos** (S) , es decir la sustancia sobre la que actúa la enzima. El sustrato es modificado químicamente y se convierte en uno o más **productos** (P). Como esta reacción es reversible se expresa de la siguiente manera:

$$E + S \rightleftharpoons [ES] \rightleftharpoons E + P$$

La enzima libre se encuentra en la misma forma química al comienzo y al final de la reacción.

En su acción como catalizador biológico, la enzima se une a las moléculas de sustrato, formando un complejo transitorio llamado enzima - sustrato.

El nombre de las enzimas suele ser el de la sustancia sobre la cual actúan + el sufijo *asa*. Por ejemplo, la sacarasa es desdoblada por la enzima sarasa, las lipasas desintegran los trigliceroles, etc. Sin embargo, algunas conservan nombres tradicionales sin la terminación - asa - por ejemplo *pepsina*. La sustancia sobre la cual actúa la enzima se llama *substrato*. Las enzimas son específicas, o sea que no todas actúan sobre los mismos substratos.

Algunas enzimas, por ejemplo la pepsina, están formadas únicamente por proteínas, otras tienen dos partes, una de las cuales es una proteína (se llama *apoenzima*) y la segunda (la *coenzima*) es una molécula orgánica menor, generalmente a base de fosfato. Las coenzimas pueden separarse de las enzimas, pero tanto la coenzima como la apoenzima por separado, carecen de actividad catalítica.

Factores que afectan la actividad enzimática

Las enzimas funcionan dentro de ciertos parámetros de temperatura y pH; esto se debe a que fácilmente puede ser alterada su constitución tridimensional y con ello, el sitio de unión al sustrato, pierde así su funcionamiento.

Para todas las enzimas existe un óptimo de temperatura en el cual éstas desarrollan su máxima acción. Por debajo de esta temperatura óptima, la enzima es relativamente más estable y, por lo tanto, puede actuar por más tiempo, aunque la reacción que cataliza procede más lentamente. Por encima de la temperatura óptima, la velocidad del proceso aumenta, pero el catalizador puede ser inactivado rápidamente.

Para cada enzima existe un pH óptimo, en el cual ésta ejerce su máxima acción y donde la curva de actividad / pH asume generalmente, la forma de campana. La mayor parte de las enzimas intracelulares tienen pH óptimo cerca de la *neutralidad*; es decir, a pH=7.0 por lo que no actúan en medios ácidos ni alcalinos; los ácidos y bases las *inactivan irreversiblemente*.

"Algunas enzimas resultan muy sensibles a ciertos venenos (cianuro, fluoruro, etc)" (Villé 1996).

Otro factor que interviene en la actividad enzimática es la concentración del sustrato; el cual está en relación directa con el funcionamiento y se incrementa hasta un punto de saturación en donde la velocidad se denomina *máxima*.

Modo de acción

Hace muchos años, el químico alemán Emil Fisher sugirió que la relación entre enzima y substrato indicaba que estas dos sustancias deberían encajar una en la otra, tal como la llave en su cerradura. Esta fue la primera teoría propuesta para explicar el enlace de sustrato al sitio activo rígido de una enzima, esta teoría gozó de gran aceptación durante mucho tiempo.

Hace aproximadamente 50 años Leonor Michaelis, mediante un razonamiento inductivo propuso la hipótesis de que la enzima se combina con su substrato para formar un complejo enzima - substrato intermedio, que luego se descompondría para liberar la enzima y los productos de la reacción. Luego calculó de qué manera debía ser afectada la velocidad de la reacción por los cambios de concentración de enzima y substrato, lo que permitió comprender experimentalmente con toda exactitud, la relación prevista.

"...según el modelo de ajuste inducido de la enzima, que es el más aceptado en la actualidad, el sustrato no ajusta perfectamente en el sitio activo" (Villé 1998). En contraposición a la teoría de la llave y la cerradura, esta teoría se refiere a un sitio activo que no es rígido, sino flexible. La unión del sustrato también cambia un poco, de modo que sus enlaces químicos pueden distorsionarse.

Una teoría reciente señala que la enzima se une al substrato en dos puntos o más y que dicho substrato se mantiene así en una posición que ejerce esfuerzo sostenido sobre sus enlaces moleculares, con lo que aumenta las probabilidades de que se rompan.

Respiración celular como ejemplo de catabolismo

El mantenimiento de la vida requiere un continuo gasto de energía. La mayor parte de la energía es almacenada en los enlaces químicos de las moléculas orgánicas. Para su utilización todas las células vivientes de los diversos organismos han desarrollado mecanismos que les permiten oxidar estos compuestos o sus derivados, rompiendo los enlaces, para dejar libre dicha energía. Esta oxidación biológica de los compuestos orgánicos se denomina *respiración*. La energía química liberada en este proceso es almacenada en forma de ATP (Adenosin Trofosfato). Además de la energía química, en la respiración también se libera energía calórica, la cual pasa al medio ambiente o mantiene la temperatura corporal.

"Todo el proceso de oxidación del alimento en el interior de la mitocondria es lo que realmente constituye la respiración celular."

Los procesos de respiración celular pueden ocurrir tanto en presencia de oxígeno como en su ausencia. En el primer caso, la respiración celular recibe el nombre de respiración *aeróbica*; y en el segundo, *respiración anaeróbica*. A los organismos que tienen respiración aeróbica se les llama *aerobios*. Ejemplo bacterias y hongos. Ocasionalmente, vegetales superiores (raíces en suelos anegados con pocos O_2, frutos con cubierta impermeable, etc) y animales (a nivel muscular) pueden respirar en anaerobiosis por tiempos variables. Cuando una molécula de azúcar se descompone durante la respiración aeróbica, produce CO_2, agua y energía, lo que se puede representar así:

Azúcar $+ O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$ + Energía

En cambio, en la respiración anaeróbica los productos del desdoblamiento pueden ser: ácido láctico, o alcohol etílico, dependiendo del tipo de célula donde ello ocurra. Estos productos cuando se encuentran en altas concentraciones, son tóxicos aun para las células que los producen.

En las células musculares, al faltar oxígeno, como los productos de la respiración (el ácido láctico) formado se acumula en el músculo, lo que produce calambres.

En la respiración anaeróbica los sustratos son sólo parcialmente oxidados, con bajos rendimientos de energía como consecuencia. No se llega a producir CO_2 y H_2O como productos finales; sus productos (alcohol etílico o ácido lácticos) aún poseen energía que puede ser aprovechada.

Aunque los dos procesos (aeróbicos y anaeróbicos) son distintos, en ambos ocurren procesos de oxidación y reducción. La glucosa, puede ser partida en dos moléculas de ácido pirúvico más hidrógeno que se une a un NAD y ATP. Un proceso inicial de la respiración celular conocido como *glicólisis o vía de Embden - Meyerhof*. Esta etapa es común a los procesos de respiración aeróbicas y fermentación y ocurre en el citoplasma.

Glucólisis y fermentación se refieren básicamente al mismo proceso, aunque sus productos finales son distintos. El primer término es aplicable a células animales y el segundo a bacterias y levaduras.

La glucósis se caracteriza por cuatro fenómenos principales:

- Fosforilación preliminar, la cual consume dos moléculas de ATP.
- Ruptura de las moléculas de carbohidrato en dos triosas.
- Oxidación y formación de un enlace fosfatídico de alta energía. Se producen NADH y ATP.
- Reordenamiento molecular para la formación de un enlace fosfatídico de alta energía, generando ATP.

Por cada molécula de glucosa, en la glucólisis se producen cuatro moléculas de ATP. Dado que en el proceso se invirtió 2 ATP, su ganancia energética neta es de dos ATP que utiliza la célula como fuente de energía.

Ciclo de Krebs:

La respiración celular aeróbica se resume en el ciclo de Krebs. Este ciclo tiene por objeto, aprovechar toda la energía contenida en el ácido pirúvico proveniente de los carbohidratos. Ocurre en la matriz mitocondrial y comprende lo siguiente:

1. Formación de una molécula de seis carbonos. La acetil CoA se combina con una molécula de cuatro carbonos (ácido oxaloacético) para formar ácido cítrico, el cual inicia el ciclo.
2. Oxidación de las moléculas de seis carbonos. El ácido cítrico se oxida, con desprendimiento de CO_2 para formar una sustancia de cinco carbonos, el ácido ∝-cetoglutárico.
3. Oxidación de la molécula de cinco carbonos, perdiendo CO_2, para formar un compuesto de carbono (ácido succínico).
4. Reordenamiento molecular y oxidación. El ácido oxaloacético se regenera y el ciclo de Krebs vuelve a empezar con la formación de una molécula de acetil CoA, a partir del ácido pirúvico.

Por cada molécula de ácido pirúvico que ingresa al ciclo se regeneran tres moléculas de CO_2. Las coenzimas reducidas que se generan dentro del ciclo junto con el ATP que se sintetiza a partir del ATP (trifosfato de adenosina), formado durante la transformación de la succinil - CoA, darán como resultado la producción neta de 36 moléculas de ATP por cada molécula de glucosa que pase por la glocólisis y después ingrese al ciclo de Krebs y la cadena de transporte de electrones.

Vías aeróbicas

Son cadenas transportadoras de electrones y fosforilación oxidativa en donde la CTE está integrada por una serie de pigmentos respiratorios ubicados en las mitocondrias (los citocromos). El proceso conocido como fosforilación oxidativa, los electrones provenientes de la degradación de la glucosa y llevados por el aceptor NAD como $NADH_2$, se van pasando de un aceptor a otro, hasta que son tomados por el aceptor final, el *oxigeno*.

El paso de electrones a través de la CTE, tiene como consecuencia la liberación de energía en forma de ATP. La importancia del sistema queda clara si pensamos que por cada molécula de $NADH_2$ que se produce en la glucólisis y en el ciclo de Krebs se forman tres moléculas de ATP utilizadas luego en otros procesos metabólicos.

Tarea

Consulte el libro de Biología Molecular de Avers e investigue sobre las etapas de degradación de la respiración.

Fotosíntesis como ejemplo de anabolismo

Es el proceso mediante el cual la energía lumínica que emana del sol es captada por las plantas y otros organismos; siendo convertida en energía química. Este proceso incorpora CO_2 y H_2O para formar compuestos orgánicos que son utilizados en todos los procesos energéticos de los seres vivientes. Este proceso sostiene la cadena trófica, y en última instancia es el sostén de toda la vida terrestre, ya que proporciona energía y oxígeno molecular. Es importante señalar que el proceso es realizado en su mayor parte por el fitoplancton, además de plantas superiores.

El proceso de fotosíntesis puede resumirse así:

$$6\ CO_2 + 12\ H_2O \rightarrow C_6H_{12}O_6 + 6O_2 + 6\ H_2O$$

Requisitos para el proceso:

- *Luz o energía solar.*

Las radiaciones de la luz más importantes para las plantas y animales se encuentran entre 750 - 450 nanómetros, o sea, lo que conocemos el espectro de luz visible. Parte de esta luz es absorbida, otra es reflejada y el resto es transmitida. En el caso de las plantas, se refleja la luz verde y se absorbe en su mayoría la luz roja y azul.

- *Pigmentos fotosintéticos*

<u>Clorofila:</u> Son pigmentos que reflejan fuertemente la luz verde y absorben la luz roja y azul del espectro visible. Las más abundantes e importantes son la clorofila a y b.

<u>Carotenoides</u>: Se asocian a la clorofila de las plantas y la protegen de la descomposición. Además, intervienen en la transferencia de energía lumínica a la clorofila.

Otras: xantofilas, ficobilinas y ficocianinas (en algas verdes - azules y rojas).

El proceso fotosintético consta de una serie de complejas vías metabólicas, algunas reacciones dependen de la luz (*fase lumínica*) y los átomos de hidrógeno del agua para construir dos tipos de moléculas transportadoras: ATP y NADPH. El gas oxígeno del agua se libera en el proceso. El ATP y NADPH entonces llevan energía química y átomos de hidrógeno a las reacciones independientes de la luz(*fase oscura*), donde ATP, NADPH y CO_2 son usados para construir azúcar."

- ***Fase lumínica***

La formación de ATP se conoce como fotofosforilación dado que necesita la absorción de luz, y puede ser de dos tipos:

<u>Fotofosforilación cíclica</u>

Cuando una cantidad lumínica (quantum) es absorbida por una molécula de clorofila; un electrón de dicha molécula se eleva a un nivel superior de energía y es recibida por un aceptor de electrones, pasa luego a los citocromos para volver al nivel inicial energético. La energía que pierde el electrón al ser devuelto desde el aceptor original hasta la clorofila, es utilizada para formar dos o más moléculas de ATP. Esto puede resumirse como: ADP + Pi + H_2O + Luz clorofila → ATP + H + O_2.

Durante esta reacción ocurre la ruptura de moléculas de agua para formar iones hidroxilo, protones oxígeno y electrones que son transferidos a la clorofila. Este proceso es conocido también como reacción de Hill.

<u>Fotofosforilación acíclica</u>

Durante este proceso se produce NADPH y ATP, los cuales serían utilizados en la fijación y reducción del CO_2 durante las reacciones de ausencia de luz.

- ***Fase oscura* (ciclo de Calvin - Benson).**

Para esta reacción no se necesita oscuridad; su nombre se debe exclusivamente al hecho de que es independiente de la luz.

Fijación de CO_2

El dióxido de carbono atmosférico es incorporado a una secuencia cíclica de reacciones denominadas ciclo de Calvin - Benson; el cual se lleva a cabo en el estroma del cloroplasto. Un azúcar de cinco carbonos se une al CO_2 al inicio del ciclo; formando una hexosa, que posteriormente es dividida en dos triosas. La energía presente en el ATP, es transferida a esas moléculas y se produce ADP + Pi. Además, se transfieren H+ a las triosas a través del $NADPH_2$ provenientes de la fotólisis; produciéndose el PGAL (fosfogliceraldehido) utilizado para renovar el azúcar de 5 carbonos y los carbohidratos restantes. Para que se forme una molécula de glucosa, se deben fijar 6 moléculas de CO_2 y por cada molécula de CO_2 fijada, se necesitan 2 moléculas de NADPH y tres de ATP.

Factores que afectan la fotosíntesis:

- *Luz*
  Existe una reacción directa entre la intensidad de la luz y la tasa de fotosíntesis. La exposición a periodos largos de luz hace que se incremente al nivel de fotosíntesis; aunque esto no ocurre así, ya que al aumentar la intensidad de la luz, la intensidad de fotosíntesis disminuye debido a la interacción de otros factores.

- *Temperatura*
  La fotosíntesis se encuentra limitada dentro de los extremos tolerados por los componentes proteínicos; entre 0-60°C. Si ocurre un aumento de temperatura, el nivel de fotosíntesis se incrementa; aunque a temperaturas muy bajas o muy altas, ésta se inhibe.

- *CO_2*
  Bajas concentraciones de dióxido de carbono desfavorecen la fotosíntesis, llegando a ser crítica en algunas plantas. La concentración normal de CO_2 en la atmósfera es 320 ppm; si ésta aumenta, por ejemplo a 1000 ppm, se hace tóxico para las plantas y provoca el cierre de los estomas, en otras plantas esto puede ser ventajoso.

- *O_2*
  Algunas de las concentraciones normales de este gas pueden inhibir el proceso de fotosíntesis en las plantas.

- *Agua*
  La falta de agua o transpiración excesiva provoca que las estomas se cierren, lo que produce un descenso en el nivel de fotosíntesis.

RESUMEN

- El metabolismo comprende todas las reacciones químicas y físicas que efectúan las células.
- El anabolismo es la fase constructiva de elaboración o síntesis de moléculas grandes a partir de otras más simples.
- El catabolismo es la fase degradativa del metabolismo en donde moléculas complejas son transformadas en otras más simples, a menudo con liberación de energía.
- Las reacciones metabólicas son reguladas por las enzimas.
- Las enzimas son proteínas catalizadoras producidas por las células vivas.
- Las enzimas regulan la rapidez y especificidad de miles de reacciones químicas intracelulares.
- La actividad enzimática puede ser afectada por la temperatura, pH, concentración de sustrato y venenos enzimáticos.
- La acción de las enzimas se explica por medio de dos teorías: *la teoría de la llave* y la *cerradura* y la del modelo de ajuste inducido.
- La respiración celular es un proceso de oxidación biológica de los compuestos orgánicos con liberación de energía.
- Los procesos de respiración celular pueden ocurrir en presencia de oxígeno (respiración aeróbica) y en

ausencia de oxígeno (respiración anaérobica).

- La respiración aeróbica es más eficiente desde el punto de vista de producción de energía, ya que en la respiración anaeróbica los sustratos no sólo parcialmente oxidados y como consecuencia hay bajos rendimientos de energía. En la respiración aeróbica se produce CO_2 y H_2O como productos finales. En la respiración anaeróbica los productos son alcohol etílico o ácido láctico, según el organismo.
- La glucólisis es una etapa común a los procesos de respiración aeróbica y fermentación y ocurre en el citoplasma. En este proceso por cada célula de glucosa se forman dos moléculas de ácido pirúvico.
- En la glucólisis se produce cuatro moléculas de ATP de las cuales se utilizan 2, por lo tanto la ganancia neta son 2 moléculas de ATP.
- El proceso de respiración celular aeróbica lo constituyen el ciclo de Krebs, y la fosforilación oxidativa.
- El ciclo de Krebs, ocurre en la matriz mitocondrial.
- Los citocromos actúan en el transporte de electrones por procesos de óxido - reducción.
- Por cada molécula de $NADH_2$ que se produce en la glucólisis y el ciclo de Krebs se forman tres moléculas de ATP. La producción neta de energía en los organismos aeróbios es de 36 moléculas de ATP.
- La fotosíntesis es un ejemplo de anabolismo.
- La fotosíntesis es el proceso mediante el cual las plantas verdes y otros organismos autótrofos producen moléculas alimenticias complejas, ricas en energía, a partir de moléculas más simples, en presencia de energía lumínica.
- La clorofila es el pigmento fotosintético por excelencia.
- La fotosíntesis sucede en dos fases: una fase lumínica y una oscura.
- En la fase lumínica ocurre una reacción química donde la energía luminosa se transforma en energía química en forma de ATP (Adenosintrifosfato). Simultáneamente se libera oxígeno.
- En la fase oscura el hidrógeno libre se combina con el bióxido de carbono para formar glucosa.

ACTIVIDADES

Concluido el estudio y análisis del tema sobre los procesos metabólicos, realiza las siguientes actividades:

Evaluación Formativa

a) ¿A qué llamamos metabolismo y qué fases comprende?
b) ¿Qué son las enzimas y cómo actúan?
c) Explique de qué manera el pH, la temperatura y la concentración de sustrato afectan la actividad enzimática.
d) ¿Qué nombre reciben las teorías que explican la acción de las enzimas?.
e) Elabore un cuadro comparativo entre la respiración aeróbia y anaerobia.
f) Esquematice el proceso de la glucólisis, ciclo de Krebs, transporte de electrones y fosforilación oxidativa en un mapa conceptual.

g) Mencione los requisitos indispensables para que ocurra la fotosíntesis.
h) Investigue las longitudes de onda que componen el espectro de luz visible y mencione cuáles de estas longitudes son absorbidas por la planta para el proceso de fotosíntesis.
i) Haga una distinción entre reacciones luminosas y las reacciones de oscuridad en la fotosíntesis.

UNIDAD 6.
PRINCIPIOS DE GENÉTICA

Presentación

Sin duda, la genética constituye un punto de interés para la mayoría de los estudiantes que ingresarán a carreras relacionadas con la biología o las ciencias naturales. La genética se ha convertido en un tema central de la biología debido a que raramente existen ramas de esta ciencia que no dependan, en cierto grado, de la genética. La biología molecular, la biología celular, biología del desarrollo, la microbiología, la ecología y la taxonomía son algunas de las ramas que tienen vínculos importantes con la genética.

Esta unidad trata los aspectos fundamentales de la herencia que te permitirán formar una idea clara de su importancia en los organismos vivientes y poseer las bases de un conocimiento que crece vertiginosamente en nuestros días.
Al finalizar la unidad, el estudiante estará en capacidad de describir las leyes de Mendel, realizar teóricamente cruces monohíbridos y dihíbridos, describir el papel de los genes en la herencia y en las mutaciones.

Te exhortamos a leer y analizar esta unidad con entusiasmo y dedicación.

Objetivos generales

Discutir los aspectos fundamentales de

la herencia.

Objetivos específicos

- Conocer la conceptualización básica de Genética para comprender los mecanismos de la herencia.
- Realizar cruces monohíbridos y dihíbridos para explicar las Leyes de Mendel.

Genética

La *genética* es una ciencia relativamente nueva; sin embargo, la historia demuestra que el hombre reconoció la influencia de la herencia desde los tiempos antiguos, pero no fue sino hasta hace poco más de 100 años que el monje austríaco Gregorio Mendel postuló una hipótesis muchas veces confirmada y que explica el mecanismo de la herencia.

Todo lo que un individuo es en lo físico, fisiológico y en su comportamiento, es producto de la *herencia* y el *ambiente*. En este sentido, cada ser es único debido a que poseé caracteres que ha heredado de sus padres, combinación genética que es única con excepción del caso de los gemelos verdaderos o univitelinos.

Leyes de la herencia

Los mecanismos de la herencia son estudiados por la genética. Mendel estudió la herencia en los chícharos (una especie de guisantes) y sentó las bases de la genética clásica. Mendel demostró que la herencia se basa en la integración de factores individuales pero separables (es decir segregables). Polinizaba los chícharos con características definidas y esperaba las generaciones subsecuentes para ir interpretando los resultados. La interpretación de lo mismo, dio lugar a que formulara dos leyes que se conocen como *Leyes de Mendel* que son la *Ley de la segregación* y la *Ley de distribución independiente*.

Para analizar ambas leyes se debe resolver un problema genético, pero es necesario conocer algunos conceptos básicos.

Alelo:
Forma alternante de un gen. Se representa con letras *mayúsculas* si es una alternativa *dominante* o con una letra minúscula si es una alternativa *recesiva*.

Cromosomas:
Cuerpos filamentosos en forma de bastón en el núcleo de las células que contienen las unidades hereditarias "*Los Genes*".

Dominancia:
Cuando un factor domina sobre otro. Por ejemplo la altura domina sobre lo enano, asimismo, el factor dominante se expresa en *mayúscula* y el recesivo en *minúscula*.

Fenotipo:
Se refiere a las características observables de un organismo.

Gen:
Unidad biológica de información genética, que se autoreproduce y

localiza en una porción definida en un cromosoma determinado.

Generación:
Se refiere a la descendencia de los organismos. Por ejemplo, si
Filial (F):
dos progenitores se cruzan entre sí, la primera generación (F_1) serán sus hijos; la F_2 serán sus nietos y así sucesivamente. Por consiguiente la F_2 de un organismo se obtiene cruzando $F_1 \times F_1$.

Genotipo:
Es el conjunto de características genéticas estudiadas en un organismo. Se expresa por pares alélicos.

Heterocigoto:
Se refiere a los organismos que presentan alelos diferentes.
(*Portador*,
Híbrido)

Homocigoto:
Se refiere a los organimos que presentan alelos idénticos, para
(*puro*)
una característica.

Mutación:
Cambio heredado y estable en un gen.

Recesivo:
Es el factor que siempre permanece enmascarado por el dominante.

Primera Ley de Mendel o Ley de Segregación

Esta ley dice que un par de genes controlan una característica en particular y que
éstos deben separarse durante la formación de gametos, para después reunirse al azar durante la fecundación.

Ejemplo

Una planta con semillas lisas se cruza con una planta con semillas rugosas. Si la característica de semilla lisas es dominante y ambas plantas son puras. Determine la F_1 y F_2. ¿Cuál es el genotipo de los progenitores (P) para la F_1 y F_2?.

Solución

Consideremos la siguiente simbología:

• *Alelos*	• *Genotipo de progenitores* (P_1)
A = semillas lisas.	Semillas lisas
a = semillas rugosas	Semillas rugosas

Al cruzar los progenitores (P_1), tenemos: AA x aa . Recuerde que ambas plantas son puras, por lo tanto el genotipo en ambos casos es homocigoto. Cada genotipo consta de dos alelos heredados (uno proveniente del gameto masculino y otro del gameto femenino).

G_1 (Gametos):
(A)(A) x (a)(a)

F_1

	A	**A**
a	Aa	Aa
a	Aa	Aa

Resultados

Fenotipo: 100% semillas lisas
Genotipo: 100% Aa
$F_2 = F_1 \times F_1$

Veamos el cálculo de la F_2

P_2 : Aa x Aa
G_2 : (A)(a) x (A)(a)

F_2

	A	a
A	AA	Aa
A	Aa	aa

Fenotipo: $\frac{3}{4}$ semillas lisas; $\frac{1}{4}$ semillas rugosas.

Genotipo: $\frac{1}{4}$ AA; $\frac{1}{2}$ Aa ; $\frac{1}{4}$ aa.

Segunda Ley de Mendel

La segunda Ley de Mendel o *Ley de la distribución independiente* nace del problema de tratar de explicar como se hereda más de una característica a la vez.
El problema es definir si un carácter influye sobre otro. Hoy día, se sabe que algunas características sí influyen.

Esta ley dice que los alelos se segregan independientemente unos de otros (no guardan relación entre sí). Para aplicar la Ley se necesita resolver un cruce con dos características a la vez (cruce dihíbrido).

Ejemplo

El cruce entre plantas de arvejas con semillas amarillas y plantas de arvejas con semillas verdes y rugosas implica el cruce de dos factores: *color* y *textura*. Se convienen los siguientes símbolos

Color A = Amarillo;
a = verde (alelo)
Textura L = Lisa;
l = rugosa

P: Fenotipo: Amarilla lisa x verde rugosa
Genotipo: AALL x aall
Gametos: AL x al
F_1: Fenotipo: todas amarillo lisa.
Genotipo: Todos A a L l

Al cruzar los individuos heterocigotos de la F_1 entre sí, obtenemos la F_2 en la forma que se aprecia en la siguiente tabla:

P_2: AaLl x AaLl
G_2 *Gametos*: AL Al aL al x AL Al aL al

	AL	Al	aL	a1
AL	AALL	AALl	AaLL	AaLl
Al	AALl	AAll	AaLl	Aall
aL	AaLL	AaLl	aaLL	aaLl
al	AaLl	Aall	aaLl	aall

Genotipo para la F_2 :	Proporción	Fenotipo
1/16 AALL 2/16 AALl 2/16 AaLL 4/16 AaLl	⇒ 9/16	amarillas lisas
1/16 Aall 2/16 Aall	⇒ 3/16	amarillas rugosas
1/16 aaLL 2/16 aaLl	⇒ 3/16	verdes lisas
1/16 aall	⇒ 1/16	verde rugosa

En el cuadro se aprecian cuatro tipos diferentes de fenotipos, producto de los diversos tipos anteriores de combinaciones alélicas que son posibles en los genotipos de cada uno de los individuos que se entrecruzaron.

Cromosomas y genes

Un *cromosoma* es una estructura compleja que se halla en el núcleo de las células, contiene una larga cadena de genes; un *gen* es una *unidad de información genética* o ADN.

Los cromosomas son visibles durante la división celular y muestran sus características morfológicas durante la *metafase*. El estudio sistemático de los cromosomas se realiza a través del análisis del *cariotipo*, que está bajo una clasificación internacional, en la cual los cromosomas se clasifican por grupo y se enumeran en orden decreciente de longitud.

Los cromosomas humanos se clasifican en siete grupos denominados con las letras del alfabeto de la A a la G, en función de su semejanza con la posición del centrómero, a saber: *metacéntricos*, submetacéntricos y acrocéntricos.

Desde el punto de vista de su composición, los cromosomas están formados por DNA y proteínas, donde principalmente con las proteínas básicas llamadas *histonas*, se forma la llamada *fibra de cromatina*. Esta cromatina se encuentra de manera descompactada cuando la célula se encuentra en interface, razón por la cual, los cromosomas no están visibles; pero al inicio de la profase de la división celular esta fibra va sufriendo un super enrrollamiento que progresivamente va estructurando las dos cromátidas que forman un cromosoma mitótico metafásico unidos por el centrómero, el cual regula el movimiento de los cromosomas durante la división celular.

La dotación cromosómica humana es de 23 pares de cromosomas, los cuales se clasifican en 22 pares de *autosomas* y un par de cromosomas sexuales (XX en la mujer y XY en el hombre). Los miembros de cada par son semejantes y se denominan *homólogos*. Al número normal de cromosomas para la especie se le denomina *diploide* y se le representa como *2n*.

Lo que diferencia a las diversas especies no es el número de cromosomas, sino la naturaleza de los factores hereditarios (*genes*) dentro de los cromosomas. Los genes controlan una o más características hereditarias. Un gen está situado en un punto especial del cromosoma llamado *Locus*.

Cuando los cromosomas se *sinapsan* durante la *meiosis* los homólogos se adhieren punto por punto, quizás gen por gen.

Los genes son duplicados y transmitidos a sucesivas generaciones con notable fidelidad, de vez en cuando experimentan cambios que se denominan *mutaciones*. Las mutaciones pueden ser de dos tipos: *mutaciones génicas* y *mutaciones cromosómicas*.

Las *mutaciones génicas* son aquellas que afectan a los genes en su estructura; pueden ser provocadas por algunas sustancias químicas, así como por radiaciones (rayos X, rayos gama, rayos cósmicos), los cuales en conjunto se conocen con el nombre de *agentes mutagénicos*.

Son ejemplos de mutaciones génicas:

- *Inserción de bases nitrogenadas.* Cuando se inserta una base nitrogenada en una secuencia de ADN, la información almacenada en *codones* se "corre" y el código genético se altera.
- *Delección de bases nitrogenadas*. Cuando una base nitrogenada se pierde, el código genético se altera, de manera que si la delección ocurre al inicio se altera por completo el código genético.
- *Sustitución de bases nitrogenadas.* Consiste en la sustitución de una base nitrogenada por otra. Este tipo de mutación puede provocar la *anemia falciforme*.
- *Las mutaciones cromosómicas*. Afectan una porción de un cromosoma. Un ejemplo es el síndrome de Down, en el cual los individuos afectados tienen 47 cromosomas en lugar de 46. El cromosoma extra es uno de los cromosomas pequeños que pertenece al grupo G y que recibe el nombre de 21, por lo que en la actualidad se ha indicado que es más correcto denominar al padecimiento como *trisomía 21*.

Las mutaciones cromosómicas pueden ser de varios tipos entre los cuales están:
a- Del *genomio* :ocurre cuando se varía el número normal haploide (2n) a otro número poliploide (3n, 4n, etc).
b- De *traslocación:* ocurre cuando una porción de un cromosoma cambia de lugar, por inversión.
c- El *entrecruzamiento de cromosomas:* ocurre durante la meiosis. En este entrecruzamiento hay intercambio de segmentos de cromosomas.
d- La *supresión o delección:* ocurre cuando una porción de un cromosoma se pierde.

ADN

En 1920, P.A. Lauene encontró que la composición básica del ADN es el nucleótido formado por bases nitrogenadas, azúcar de 5 carbonos llamada desoxirribosa y un grupo fosfato. Las bases nitrogenadas son las *purinas* (*guanina* y la *adenina*) formada por anillos dobles y las *piridiminas* (*citocina* y la *tiamina*) formada por anillos sencillos. Posteriormente, Chargaff (1940) demostró que existe complementaridad entre bases nitrogenadas. A se une a T por dos puentes de hidrógeno y C se une a G por tres puentes de hidrógeno.

En 1953, Jones Walson y Francis Crick, proponen el modelo actual que explica la estructura del ADN y su comportamiento. Según estos científicos, el ADN es una molécula doble retorcida que puede presentar diferentes formas. Las dos hebras se unen por medio de puentes de hidrógeno.

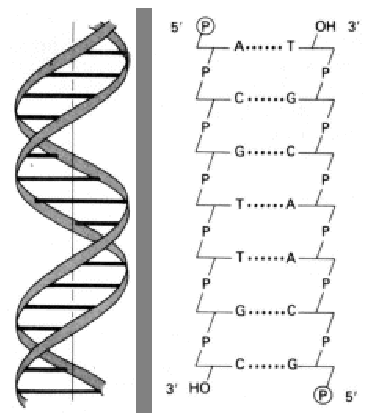


Fig.9 (a) Modelo de la doble hélice de ADN, (b) Representación abreviada de un segmento de ADN

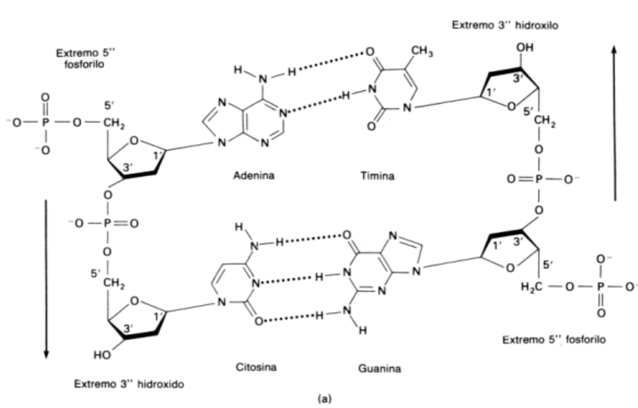


Fig.10. Una corta sección de la doble hélice de ADN

El proceso de **replicación de ADN** es la base de la herencia del material genético Las dos cadenas de la doble hélice se mantienen juntas por medio de puentes de hidrógeno entre las bases. De manera individual, estos puentes de hidrógeno son débiles y pueden romperse con facilidad. Watson y Crick supusieron que la replicación ocurría por separación gradual de las cadenas de la doble hélice, algo muy semejante a la separación de las dos mitad el estado de doble cadena.es de una cremallera. debido a que las dos mitades son complementarias la una de la otra, cada cadena contiene la información requerida para la construcción de la otra. Una vez que las cadenas se separan, cada una puede actuar como molde para dirigir la síntesis de la cadena complementaria y restaurar el estado de doble cadena.

La replicación del DNA es semiconservativa, lo que significa que durante la división celular cada una de las células hijas recibe una mitad del dúplex original. Este tipo de duplicación semiconservativa se puede realizar porque la secuencia de las bases que la constituyen ha sido conservada, de forma que la secuencia de cada molécula madre sirve de molde para formar la secuencia de las dos moléculas hijas.

En toda célula que va a dividirse la cromatina debe duplicarse para repartirse por igual en cada una de las células hijas. Cada cromátida del ADN tiene solamente una doble hélice, y presenta una cadena vieja (procedente de la molécula madre) y otra recién sintetizada. La replicación del ADN es la capacidad que tiene para hacer réplicas.

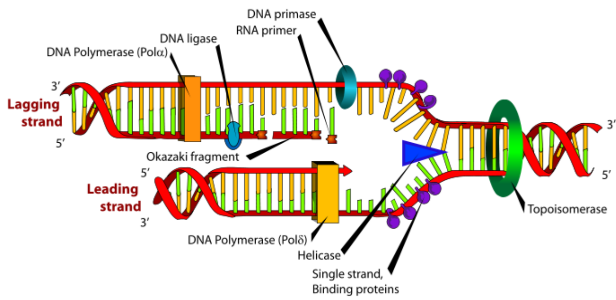


Fig. 11. Replicación del DNA (Tomado de Wikimedia.org./wikipedia/commons.)

Una de las características más llamativas del ADN es que es capaz de codificar una cantidad enorme de información biológica.

Síntesis proteica del ADN: El ADN incorpora las instrucciones para la producción de proteínas. Una proteína es un compuesto formado por pequeñas moléculas, llamadas aminoácidos, que determinan su estructura y función. La secuencia de aminoácidos a su vez está determinada por la secuencia de bases nucleótidas del ADN. Cada secuencia de tres bases, llamada triplete, constituye una palabra del código genético, o codón, especificante de un aminoácido determinado. Por tanto, por ejemplo, una proteína formada por 100 aminoácidos queda codificada por un segmento de 300 nucleótidos de ADN.

De las dos cadenas de polinucleótidos que forman una molécula de ADN, sólo una, llamada paralela, contiene la información necesaria para producción de una secuencia de aminoácidos determinada. La otra, llamada antiparalela, ayuda a la replicación.

Los pasos sucesivos de la síntesis de proteínas son básicamente los mismos en todas las células vivas, pero las relaciones de tiempo y lugar entre estos pasos son muy diferentes entre las células procariotas y eucariotas. En los dos tipos celulares, el ARN de transferencia(ARNt), el ARN ribosómico(ARNr) y el ARN mensajero (ARNm) se transcriben a partir de una cadena de la doble hélice de ADN.

En las células eucariotas, durante la síntesis de proteínas la información hereditaria no es traducida directamente sobre el ADN. Hay una etapa intermedia, llamada transcripción, que permite a la célula hacer una copia de la información contenida en una de las cadenas del ADN. Esta transcripción, se hace gen a gen, o por grupos de genes gracias a una enzima llamada ARN polimerasa. El producto de ésta copia es el ARNm, por lo tanto la transcripción del ADN también podría llamarse síntesis del ARNm y ocurre en tres etapas: (1) iniciación , (2) alargamiento, (3) terminación .

La síntesis del ARNm comienza cuando la ARn polimerasa se une a un punto de una de las cadenas del ADN. Cuando el ADN es transcrito por el ARN polimerasa, la información del ADn es copiada para formar un ARNm primario. Este ARNm primario sufre en el núcleo una serie de reacciones de maduración formándose un ARNm maduro. La membrana nuclear probablemente facilita la maduración del ARNm, impidiendo además su traducción inmediata. El

ARNm sale del núcleo y es traducido en el citoplasma celular en los ribosomas.

Traducción: El proceso de síntesis de proteínas consiste en la lectura y traducción de la información del ARNm por parte de los ribosomas. Los ribosomas sirven de moldes para que se unan los aminoácidos, en un orden dictado por el código escrito en el ARNm. De esta forma, el ribosoma queda destinado a sintetizar la proteína. Como no hay relación directa entre los codones (número de nucleótidos que codifican un aminoácido) del ARNm y los aminoácidos que se necesitan para sintetizar las proteínas; entonces la traducción de un codón en un aminoácido requiere de la intervención de un ARNt.

La síntesis proteica se inicia con la formación de un complejo iniciador. Este complejo se forma por la unión del primer codón. La formación de la cadena peptídico, empieza inmediatamente se ha formado un enlace peptídico, con la participación de una enzima; además las moléculas de ARNt quedan libres y pueden usarse de nuevo. La finalización de la síntesis proteica consiste en la liberación de la proteína y la separación del ribosoma y el ARNm. Al terminar la síntesis el ribosoma puede usarse de nuevo, pero se requiere la síntesis de un nuevo ARNm . En las células el ARNm se sintetiza y descompone en un tiempo relativamente corto; aunque una sola molécula de ARNm puede ser traducida en muchas proteínas en el mismo momento. Esto es posible porque cada ARNm puede tener de algunos hasta más de cien ribosomas fijos a ella, que traducen un mensaje conforme se mueven a lo largo de los nucleótidos. Esto explica que todo el proceso de síntesis proteica se realiza en cuestión de minutos.

RESUMEN

- La rama de la biología que se ocupa de los fenómenos de la herencia se llama *genética*.
- Gregorio Mendel sentó las bases de la genética clásica y formuló las leyes de la herencia que se conocen como las *Leyes de Mendel*.
- La primera Ley de Mendel o Ley de la segregación dice que "*un par de genes controlan una característica en particular y que éstas deben separarse durante la formación de gametos para después reunirse al azar durante la fecundación*".
- La segunda Ley de Mendel o Ley de la distribución independiente dice que *los alelos se segregan independientemente unos de otros.*
- Los *alelos* son formas alternantes de un gen.
- El *fenotipo* es el conjunto de características observables en un organismo.
- El *genotipo* es el conjunto de características genéticas estudiadas en un organismo.
- En un cruce el *factor dominante* enmascara al factor recesivo.
- Los organismos que presentan alelos idénticos son *homocigotos* y los que presentan alelos diferentes son *heterocigotos*.
- La *generación filial* (F) se refiere a la descendencia de organismos.
- Los cromosomas son estructuras

complejas que se encuentran en el núcleo de las células y contienen los genes.

- Los *genes* son las unidades de información genética.
- Los *cromosomas* están formados por ADN y proteínas.
- Los humanos poseen 46 cromosomas (22 pares de autosomas y un par de cromosomas sexuales).
- Las *mutaciones* son cambios en el genoma. Pueden ser génicas y cromosómicas.
- Una de las características más llamativas del ADN es que es capaz de codificar una cantidad enorme de información biológica.
- El ADN está formado por bases nitrogenadas (*adenina, guanina, citocina, timina*), un azúcar de cinco carbonos (desoxirribosa) y un grupo fosfato.
- El modelo actual de la estructura del ADN fue propuesto por James Watson y Francis Crick en 1953.
- El proceso de **replicación de ADN** es la base de laherencia del material genético. La replicación de ADN es semiconservativa, porque cada una de las dos moléculas hijas contiene la mitad de la molécula madre.

ACTIVIDADES

Después de haber internalizado los conocimientos sobre principios de genética y las leyes de la herencia, realiza las siguientes consignas de aprendizaje y evaluación para comprobar que has aprendido.

- *Evaluación formativa*

a) Explique las Leyes de Mendel.
b) Diga cuál es la diferencia entre mutación cromosómica y mutación génica.
c) Prepara un glosario con términos utilizados en genética.

- *Evaluación práctica*

a) Si se cruzan moscas de la fruta de alas rectas (tipo silvestre) con moscas de alas arrugadas, toda la F_1 tendrá alas rectas. Mediante el uso de una cuadrícula de Punnett, prediga los fenotipos y genotipos de la generación F_2 y la proporción relativa de cada uno.
b) Determine la proporción genotípica y fenotípica para la F_2 de un cruce de plantas con semillas redondas y amarillas con plantas con semillas arrugadas y verdes. Sean R el alelo redondo, r el alelo arrugado, L el alelo amarillo y l el alelo verde. ¿Cuál es el genotipo y el fenotipo de los progenitores?
c) El pelo corto en los conejos está determinado por el gen dominante (L) y el pelo largo por su alelo recesivo (l). El pelo negro resulta de la acción del genotipo dominante (N) y el café del genotipo recesivo (n).

UNIDAD 7.
DIVISIÓN CELULAR Y REPRODUCCIÓN

Presentación

Usted comenzó la vida como una célula única, creada cuando el espermatozoide de su padre se unió con el óvulo de su madre. El óvulo fertilizado pasó a ser una célula el *cigoto*, la cual contenía la combinación única de genes que rigieron el desarrollo de sus características únicas, tales como el color de sus ojos y la forma de su nariz. El óvulo fertilizado comenzó a dividirse: se duplicaron todos los genes y se dividió en dos células, pasando un juego completo de genes a cada célula. Estas dos células, a su vez duplicaron los genes que habían recibido y así usted llegó a estar formado por cuatro células, las que sucesivamente se dividieron hasta formar los billones de células que constituyen su cuerpo.

En esta unidad de aprendizaje, usted tendrá la oportunidad de analizar cómo una célula se divide, como asegurar que cada nueva célula reciba un juego completo de genes; podrá establecer las diferencias entre mitosis y meiosis, reproducción sexual y asexual y su importancia para la continuidad de la vida.

El acceso, construcción y comprensión de los conocimientos relacionados con la reproducción se facilitarán con la lectura y análisis de esta unidad instruccional.

Objetivos generales

- Explicar los mecanismos de multiplicación celular.
- Diferenciar reproducción asexual de reproducción sexual.
- Describir los aspectos principales de reproducción y desarrollo en los seres vivos.

Objetivos específicos

- Explicar las etapas del ciclo celular.
- Establecer las diferencias entre mitosis y miosis.
- Conocer las etapas fundamentales de desarrollo en los animales
- Explicar los diferentes tipos de reproducción asexual.
- Señalar la importancia de la reproducción para la supervivencia de la especie.
- Explicar el proceso de gametogénesis (espermatogénesis y ovogénesis) en los humanos
- Explicar estrategias de reproducción sexual en plantas

A. Reproducción celular

La mitosis es el proceso de reproducción celular más generalizado. Se caracteriza por los profundos cambios que experimenta el núcleo. Naturalmente la mitosis no es sino parte de un ciclo total que incluye el periodo en el cual no hay división celular. Este periodo se ha llamado erróneamente, *fase de reposo* o *interfase*. Durante la interfase se duplican en ADN. Lo importante de este proceso es que, al duplicarse el material nuclear ocurre una copia exacta del código de información genética, para luego ser distribuido por igual a los dos núcleos que formarán las dos células hijas, las cuales tendrán, por consiguiente, idéntica composición genética.

La mitosis no sólo garantiza la reproducción celular, sino también la identidad total entre las células iniciales y sus descendientes.

B. **El ciclo celular**

El ciclo celular es una sucesión controlada de eventos, en los cuales una célula pequeña crece y se convierte en una célula más grande, que se divide luego para formar dos células más pequeñas. El ciclo dura cerca de 24 horas en algunas células eucariotas.

El ciclo celular tiene tres etapas principales: la *interfase*, la *mitosis* y la *citocinesis.*

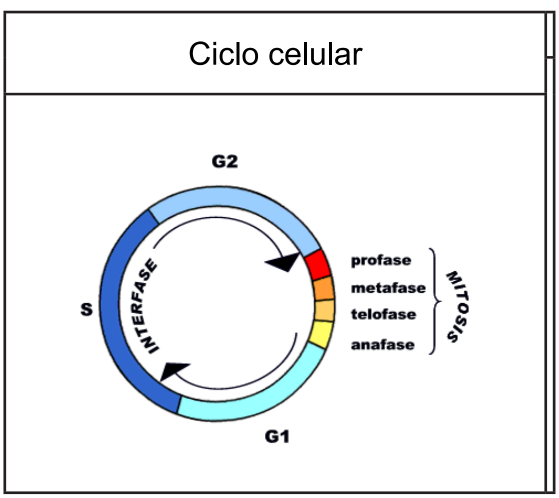


Fig. 12. Ciclo Celular

- *Interfase*. En esta etapa del ciclo, los cromosomas son largos y delgados, por lo que no son visibles. La interfase puede subdividirse en tres periodos G_1, S, G_2. La interfase temprana llamada G_1, es el tiempo de actividad bioquímica durante el cual la célula sintetiza materiales (a excepción del ADN) y crece hasta el tamaño normal. La célula pasa la mayoría de su tiempo en esta interfase.

El periodo S de la interfase es el tiempo de la síntesis de ADN. Cada cromosoma se duplica: su molécula de ADN hace una copia exacta de sí misma. La célula se prepara para entrar en la mitosis. El periodo S de la interfase es seguido por el periodo G_2, tiempo de reparación del ADN. Las dos copias de cada cromosoma llamadas *cromátidas hermanas*, se encuentran unidas por un centrómetro formando un cromosoma simple.

- *Mitosis*. Durante la mitosis las cromátidas hermanas se separan y se mueven a polos opuestos. Aunque la mitosis es un proceso continuo, para su mejor estudio se divide en cuatro fases: profase, metafase, *anafase* y *telefase*.

- *Profase*. Los cromosomas están estrechamente enrrollados y son más cortos y más gruesos. La envoltura nuclear se desintegra, lo que permite a los cromosomas distribuirse en la célula entera. Durante la profase los nucleolos desaparecen. Hacia el final de la profase, el huso mitótico se desarrolla a partir de fibras de proteínas. Algunas de las fibras se unen a los cromosomas a nivel de sus centrómeros y otras forman una estructura que mantiene la forma de la célula durante la mitosis. En sus polos, las fibras se unen a los centríolos en las células animales y en las células vegetales a los casquetes polares.

- *Metafase*. Los cromosomas se alinean en el plano ecuatorial. Recordemos que estos cromosomas están formados, cada uno, por dos cromátidas, que construirán los cromosomas hijos.

- *Anafase*. Las cromátidas hermanas se separan y cada una se mueve a lo largo del huso, en dirección a los polos opuestos. Precisamente, el centrómero se divide en dos y separa las cromátidas hermanas de cada cromosoma. Cada cromátida tiene ahora su propio centrómetro y se denomina cromosoma.

- *Telofase*. Durante esta fase, los cromosomas se encuentran en los polos, reaparecen los nucleolos, el huso desaparece y las membranas entonces forman una envoltura nuclear alrededor de cada juego de cromosomas.

- *Citocinesis*. La división del citoplasma se llama *citocinesis*; ésta comienza durante la anafase y continua durante la telofase de la mitosis, mientras los cromosomas se están moviendo a los polos opuestos. Finalmente, forma
- dos células cada una con un núcleo que contiene un juego completo de cromosomas y aproximadamente la mitad de citoplasma.

Los cromosomas en cada célula hija se alargan y se inicia nuevamente el ciclo celular. La citocinesis en una célula animal difiere de la citocinesis en una célula vegetal. En una célula animal, comienza a formarse un surco de segmentación en forma de un estrechamiento en la superficie celular de la región del plano ecuatorial por la acción de proteínas especiales. Ese estrechamiento se extiende y profundiza hasta que la célula original queda totalmente partida en dos. En las células vegetales, el citoplasma se divide construyendo dos membranas plasmáticas y la formación de una placa celular interna a lo largo del plano ecuatorial que divide la célula en dos. Luego para completar la división, sacos membranosos derivados del complejo de Golgi, llevan hasta el tabique nuevo material para la pared celular.

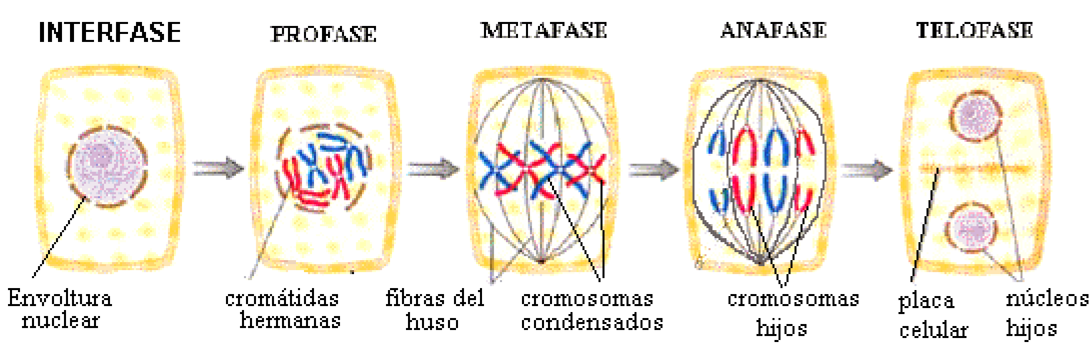


Fig. 13. Representación esquemática de la mitosis Imagen tomada de Berg (1997)

Al sufrir una herida en nuestra piel, muchas células mueren. Las células formadas en el proceso de cicatrización deben ser iguales a las anteriores para que se forme la nueva piel. Esto se logra gracias a la mitosis.

Meiosis

La *meiosis* es un proceso por medio del cual una célula diploide (2*n*), origina células hijas con un número haploide (*n*) de cromosomas. Esta reducción tiene lugar durante la formación de gametos y esporas. La mitosis y la meiosis se dan en forma alternante para permitir la reproducción y crecimiento de los organismos superiores.

La meiosis es semejante a dos mitosis sucesivas; sin embargo, existen diferencias significativas entre ambos procesos.

En la primera división meiótica replica el ADN; forman cromosomas homólogos que se aparean, lo cual se denomina *sinapsis*, intercambian material entre cromosomas y el centrómero no se divide; se obtienen al final dos células. Durante la segunda división meiótica el ADN no se replica, pero el centrómero se divide y separa la cromátidas de los cromosomas. Al final se obtienen cuatro células haploides.

La sinapsis y la formación de tétrada solamente ocurren en la primera división meiótica. La segunda división meiótica es esencialmente una mitosis, pero los cromátidas se separan para originar núcleos haploides.
Veamos paso a paso lo que ocurre en la meiosis:

Primera división meiótica

- *Interfase*. Similar a lo que ocurre en la mitosis; el material genético se duplica durante la fase S de la interfase.
- *Profase I.* Se forman cromosomas homólogos (tétradas o bivalentes), ocurre la sinapsis y el entrecruzamiento y desaparece la envoltura nuclear.
- *Metafase I.* Los cromosomas homólogos se alinean en el ecuador.
- *Anafase I.* Se separan los cromosomas homólogos.
- *Telofase I.* Se organizan los cromosomas y ocurre la citocinesis.

Segunda división meiótica

- *Profase II.* Similar a la profase mitótica.
- *Metafase II.* Los cromosomas se alinean en el ecuador.
- *Anafase II.* Se separan la cromátides y migran hacia polos opuestos.
- *Telofase II.* Se forma la membrana nuclear, los cromosomas se alargan y ocurre citocinesis. Se obtienen cuatro células haploides.

D- **Reproducción:**

La reproducción puede definirse como la capacidad que tiene un organismo de perpetuar su especie. Es decir, que la supervivencia de cada especie depende de que sus miembros individuales se reproduzcan y generen nuevos individuos que sustituyan a los que mueran**.** En los organismos unicelulares, la división celular implica una verdadera reproducción; algunos invertebrados también cuentan con este mecanismo de reproducción y crecimiento. Este tipo de reproducción se conoce como ***reproducción asexual***, un solo progenitor se divide a la mitad, produce yemas o se fragmenta, formando dos o más descendientes que suelen ser idénticos a él. Por el contrario, los organismos pluricelulares provienen de una sola célula, el cigoto, y la repetida multiplicación de ésta y de sus descendientes determina el desarrollo y crecimiento del individuo. Este proceso implica la producción y fusión de dos gametos (*óvulos* y *espermatozoides*, en animales), que al unirse forman la célula huevo o cigoto. Hay participación de dos progenitores. Esta forma de reproducción se conoce como ***reproducción sexual.***

"La reproducción sexual tiene la ventaja biológica de promover la *variedad genética* entre los miembros de la especie, dado que la descendencia es el producto de una combinación específica de genes aportados por ambos padres, y no una copia genética de un solo individuo" (Solomon 1996).

La combinación de genes mediante la reproducción sexual, da origen a descendencia más apta para la supervivencia de sus progenitores.

a.- Reproducción asexual:

En la reproducción asexual un único organismo es capaz de originar otros individuos nuevos, que son copias del mismo desde el punto de vista genético. En general, es la formación de un nuevo individuo a partir de células paternas, sin que exista meiosis, formación de gametos o fecundación; por lo tanto, no hay intercambio de material genético (ADN). En ella participan células somáticas que son haploides o diploides, dependiendo de la especie.
Tipos de reproducción asexual:

- **Multiplicación vegetativa**: por fragmentación y división de su cuerpo, los vegetales originan nuevos individuos, genéticamente idénticos al que los originó. Ej. Estacas, vástagos, estolones.

- **Bipartición o fisión binaria**: es la forma más sencilla en organismos unicelulares, cada célula se parte en dos, previa división de núcleo (cariocinesis) y posterior división de citoplasma (citocinesis). Ej: *Euglena*

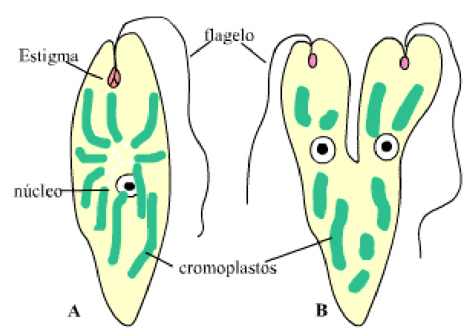


Fig. 14. Fisión binaria

Gemación: es un sistema de duplicación de organismos unicelulares donde por evaginación se forma una yema que recibe uno de los núcleos mitóticos y una porción de citoplasma. Uno de los organismos formados es de menor tamaño que el otro, ej: *Sachharomyces cereviceae*. La hidra también se reproduce por gemación.

- **Fragmentación:** en pluricelulares se denomina a la separación de porciones del organismo que crecen hasta convertirse en otro individuo. Pueden producirse por simple ruptura o por destrucción de partes viejas , que dejan separadas partes de la planta que se transforman en individuos independientes. La estrella de mar puede regenerar su cuerpo de un fragmento del cuerpo original. Existen numerosos ejemplos de fragmentación que son usados para la propagación de vegetales útiles al ser humano. Ej: estacas y acodo.
- **Esporulación**: formación mitótica de células reproductivas especiales (esporas), provistas de paredes resistentes.Ej. helechos, hongos, algas y otras plantas inferiores.
- **Clonación**: Ocurre cuando un organismo se autoduplica, produciendo copias idénticas.
- **Apomixis**: fenómeno de los vegetales superiores donde hay formación asexual de un embrión, <u>sin fecundación</u>.

La ventaja de la reproducción asexual sobre la sexual, es que en la primera se obtiene un mayor número de descendientes y se requiere de un solo progenitor.

a- Reproducción sexual en animales:

La reproducción sexual requiere la intervención de dos individuos. Los descendientes producidos como resultado de este proceso biológico, serán fruto de la combinación del ADN de ambos progenitores y, por tanto, serán genéticamente distintos a ellos. Esta forma de reproducción es la más frecuente en los organismos complejos, como en el caso de la especie humana.

En la reproducción sexual los nuevos individuos se producen por la fusión de los gametos haploides para formar el huevo o cigoto diploide. Los espermatozoides son los gametos masculinos y los ovocitos los gametos femeninos. La meiosis produce células que son genéticamente distintas unas de otras; la fecundación es la fusión de los gametos que produce una nueva combinación de alelos, y por lo tanto incrementa la variación sobre la cual actúa la selección natural.

La fecundación tiene tres funciones:

1. Transmisión de los genes de ambos padres al hijo
2. Restauración del número diploide de cromosomas reducidos durante la meiosis
3. El comienzo del desarrollo del embrión

"La reproducción sexual ofrece el

beneficio de producir variaciones genéticas entre los descendientes, lo cual aumenta la oportunidades de sobrevivir de la población. "

En la mayoría de los peces y en los anfibios,comoenmuchosinvertebrados, la fecundación es externa. Entre los organismos que depositan huevos amniotas (reptile**s**, aves y mamíferos monotremas (ornitorrinco), la fecundación es interna.

La reproducción humana emplea la fecundación interna y su éxito depende de la acción coordinada de las hormonas, el sistema nervioso y el sistema reproductivo. Las **gónadas** son los órganos sexuales que producen los gametos. Las gónadas masculinas son los testículos, que producen espermatozoides y hormonas sexuales masculinas y las gónadas femeninas son los ovarios, que producen óvulos y hormonas sexuales femeninas. Los gametos se forman, mediante un proceso meiótico denominado **gametogénesis.** Este proceso se efectúa en el interior de las gónadas y se inicia en células sexuales no diferenciadas y diploides, que en los animales se llaman **espermatogonias** y **ovogonias**.

La gametogénesis humana se inicia en la etapa de pubertad, que en el hombre se alcanza aproximadamente entre los 10 y 14 años de edad y se le denomina **espermatogénesis**. En la mujer, la producción de gametos u **ovogénesis** se inicia al tercer mes del desarrollo fetal y se suspende en profase I de leptoteno, esta meiosis se reinicia entre los 10 y 12 años de edad, que es cuando presentan primer ciclo menstrual.

Diferencias entre espermatogénesis y ovogénesis

Espermatogénesis

- Se realiza en los testículos
- Ocurre a partir de la espermatogonia
- Cada espermatogonia da origen a cuatro espermatozoides
- En meiosis I el material se divide equitativamente
- Los espermatozoides se producen durante toda su vida

Ovogénesis

- Se realiza en los ovarios
- Ocurre a partir de la ovogonia
- Cada ovogonia da origen a un óvulo y a 3 cuerpos polares inservibles
- En meiosis I no se divide el material por igual, quedando una célula hija con casi todo el citoplasma
- La mujer nace con un número determinado de óvlos,aproximadamente 400.000

Una vez que se ha formado un cigoto, se inicia una etapa de vida de un organismo conocida como desarrollo. La segmentación es la primera etapa del desarrollo de TODOS los organismos multicelulares. La segmentación convierte, por mitosis, al cigoto (una sola célula) en un embrión multicelular. La primera división origina dos células (la línea divisoria se conoce como "primer surco" por su aspecto externo), la segunda división es perpendicular a la primera (cuatro células) y la tercera corta el plano ecuatorial. Los huevos de sapo se dividen para producir cerca de

37.000 células en alrededor de 40 hs.

Las divisiones se continúan repitiendo aumentando así el número de células o blastómeros. Cuando el embrión contiene aproximadamente 32 células se denomina **mórula**. Las células de la mórula se continúan multiplicando formando una bola de varios cientos de células. En su interior se origina una cavidad llena de líquido: el blastocele, tomando entonces el nombre de **blástula** o blastocisto (en mamíferos). El tamaño decreciente de las células a medida que se dividen incrementa la relación superficie/volumen, permitiendo un intercambio de oxígeno más eficiente entre las células y su entorno.

Seguido de ésta etapa, ocurre un proceso por el cual, el blastocisto se convierte en un embrión formado por tres capas, llamado gástrula, el proceso en sí recibe el nombre de gastrulación, en el que las células se disponen en tres distintas capas germinales, o capas embrionarias: Ectodermo, mesodermo y endodermo.

Ectodermo
El ectodermo formará : la epidermis y estructuras asociadas, una porción del ectodermo: el ectodermo neural originará el sistema nervioso.

Mesodermo
El mesodermo forma estructuras asociadas con las funciones de movimiento y soporte: músculos, cartílagos, huesos, sangre y el tejido conectivo. El sistema reproductivo y los riñones se forman del mesodermo.

Endodermo
El endodermo forma tejidos y órganos asociados con los sistemas respiratorios y digestivo. Muchas estructuras endocrinas como la glándula tiroides y paratiroides se forman a partir del endodermo. También se originan del endodermo el hígado, páncreas y la vesícula biliar.

El proceso mediante el cual las células se especializan recibe el nombre de diferenciación celular. La diferenciación también se refiere a las transformaciones de células en tejidos y órganos. La morfogénesis, son los continuos cambios precisos y complejos movimientos celulares que generan la forma de un organismo pluricelular, con su complejo sistema de tejidos y órganos de forma que ocurren en el embrión hasta adquirir la forma característica de la especie. Tanto el crecimiento como la diferenciación, contribuyen a la morfogénesis, al igual que el crecimiento diferencial y los movimientos celulares.

c- Reproducción de las plantas sin semilla
Los musgos y las hepáticas son ejemplos de plantas sin semillas. Son plantas terrestres que carecen de raíz, tallos y hojas y necesitan del agua para poder reproducirse. Sus espermatozoides deben nadar para fecundar al huevo. En el ciclo de vida de los musgos, la generación haploide, plantas gametófitos, se alternan con la generación diploide (esporófita). Los gametófitos producen gametos masculinos (anteridios) y femeninos (arquegonios), cuando ocurre la

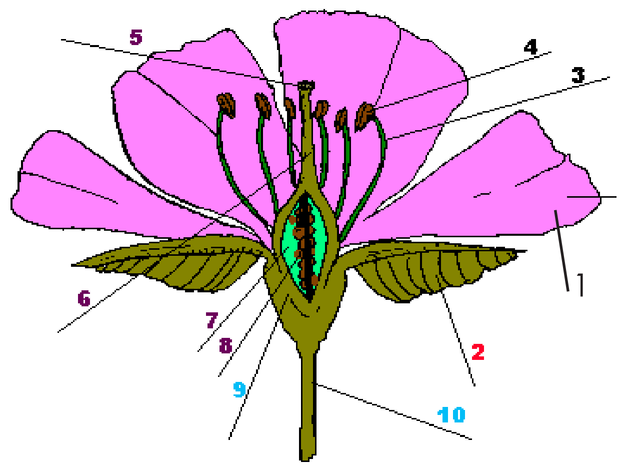
fecundación se origina un cigoto que dará orígen a la fase esporófita en la parte superior del gametófito. El esporófito contiene una cápsula que contiene las esporas haploides que se han originado por meiosis. Al madurar, la cápsula abre, las esporas son dispersadas y finalmente se desarrollan formando otro gametófito, completando así el ciclo de vida.

Los helechos tampoco producen semillas, pero sí presentan tallo (rizoma), raíces y hojas (frondas), además tienen un sistema vascular bien desarrollado. Las frondas constituyen el esporófito, en su envés contienen estructuras llamadas soros, formados por un conjunto de esporangios que contienen las esporas haploides . algunas de éstas esporas al caer al suelo, se desarrollan formando pequeños gametófitos (de 5a 10mm), planos y en forma de corazón que producen células espermáticas y células huevo. Ocurre la fecundación y surge el cigoto que dará lugar a la siguiente generación de esporófitos.

d- Reproducción en plantas con semilla

Las gimnospermas y las angiospermas constituyen el grupo de las plantas con semilla, característica que las distingue y que contribuye a su éxito en la tierra. Las gimnospermas incluyen plantas vasculares cuyas semillas no están contenidas dentro de un fruto. El polen se produce en conos masculinos y generalmente es transportado por el viento al cono femenino que contiene el gameto femenino, ocurre la fecundación y se forma la semilla. Cuando las escamas del cono se abren, las semillas son liberadas y se diseminan por la acción de la gravedad, el viento o los animales.

Las angiospermas son plantas con flores y contienen las semillas encerradas en un fruto (ovario maduro); estrategias que garantiza su polinización y protección y dispersión de sus semillas. Algunas especies son monoicas , poseen flores estaminadas y pistiladas en la misma planta. Otras especies son diocas, o sea que tienen flores estaminadas y pistiladas en plantas diferentes. La polinización puede ser cruzada o autopolinización y ésta puede ser realizada por el viento, aves, insectos y algunos mamíferos.



1- corola (pétalos)	6- estilo
2- Cáliz (sépalos)	7- ovario
3- Filamento	8-óvulos
4- Antera	9- receptáculo o tálamo
5- Estigma	10-pedúnculo

Fig. 15. PARTES DE LA FLOR Tomado de (www.geocities.com/gcintron2002/actividad1.htm)

Cuando un grano de polen llega al estigma de una flor, se forma un tubo polínico que crece a través del estilo hasta llegar al óvulo dentro del ovario; ocurre la fecundación y se forma el cigoto que dará origen al embrión. Éste está rodeado por tejido nutricio (endosperma) e integumentos (testa y tegmen) que en conjunto forman la semilla. La polinización y fecundación de la flor, además de la maduración de la semilla, son factores que estimulan el desarrollo del fruto. Conforme el fruto madura, suele cambiar de color, textura y pude tener aroma y sabor.

Las semillas germinan, si reúnen condiciones ambientales de luz, temperatura y humedad apropiadas, de lo contrario permanecen latentes y viables por diferentes periodos de tiempo según la especie.

ACTIVIDADES

Después de haber leído y analizado, en forma independiente o grupal, los contenidos de esta unidad de aprendizaje sobre la reproducción, esperamos que esté en capacidad de realizar la siguiente evaluación formativa.

- *Evaluación formativa*

a. Elabore un cuadro comparativo entre mitosis y meiosis.
b. Diagrame las fases de mitosis.
c. Establezca las diferencias entre la mitosis animal y la vegetal.
d. Exprese verbalmente o por escrito la importancia de la mitosis y de la meiosis.
e. Mencione las 3 capas germinativas y loe tejidos y órganos que se derivan de cada una de ellas.
f. Mencione las ventajas de la reproducción asexual y sexual
g. Explique cómo se realiza la reproducción en musgos, helechos y plantas con flores.
h. ¿Qué ventajas representa el fruto para las angiospermas?

- *Evaluación sumativa*

Elabore un mapa conceptual en donde explique los sucesos importantes en la meiosis I y II y su importancia para la continuidad de la vida.

UNIDAD 8.
CLASIFICACIÓN DE LOS SERES VIVOS

Presentación

La gran variedad de los seres vivos, ha motivado al hombre a su clasificación. Millones de organismos pueblan la Tierra, viven en el aire, en el suelo y en las aguas. Comprenden desde diminutos organismos que no pueden apreciarse a simple vista hasta árboles y animales inmensos. Su clasificación no es una tarea fácil, constantemente se descubren especies y algunas desaparecen sin haberlas conocido.

Desde los tiempos de Aristóteles, los organismos vivos fueron agrupados en dos reinos: *Plantae* y *Animalia*, luego se sugirió el reino *Protista* y posteriormente se adicionó el reino *Fungi* y el reino *Monera*. Aunque otros investigadores sugieren siete y más reinos, para efectos de nuestro estudio en esta unidad de aprendizaje se consideran los cinco reinos antes mencionados y una descripción de sus características generales que usted deberá conocer.

La unidad también hace énfasis en las principales categorías taxonómicas empleadas en el sistema de clasificación vigente.

Lea comprensivamente el texto sobre la clasificación de los seres vivos y desarrolle las actividades de aprendizaje y autoevaluación que están al final de la unidad.

Objetivos generales

- Reconocer los caracteres utilizados para la clasificación de los organismos vivos en los distintos reinos.
- Explicar el origen de los sistemas de clasificación de los organismos vivos.

Objetivos específicos

- Analizar las características de los distintos reinos reconocidos en la actualidad.
- Mencionar las principales categorías taxonómicas empleadas para la identificación de plantas y animales.
- Demostrar en qué consisten las claves taxonómicas.

Los seres vivos

La idea de clasificar los seres vivos, empieza con Aristóteles (384 - 322 A. C.) El término *clasificación* se refiere al ordenamiento de los organismos vivos en grupos o categorías que tienen características en común: la identificación se refiere al reconocimiento de ciertos caracteres para determinar a qué categoría pertenece el organismo estudiado. Para la identificación se utilizan elementos descriptivos llamados *claves taxonómicas*. Son muy utilizadas aquellas basadas en caracteres que indican relaciones de parentesco (*filogenética*) entre los organismos a clasificar.

La ciencia encargada del estudio de los principios, las reglas y los procedimientos de la clasificación es la *taxonomía*. Actualmente el sistema de clasificación se basa en el sistema original de Linneo.

Linneo ideó un sistema de nomenclatura

binario o binomial, donde un organismo tiene un nombre único compuesto de dos partes, en cualquier parte del mundo. La primera parte designa *el género;* la segunda corresponde a la especie. El nombre científico de una especie puede hacerse con base a varios criterios como la forma del organismo, el color, su semejanza con otros seres vivos, la localidad geográfica donde habita; también con el nombre de un científico destacado. Una *especie* es un grupo de organismos con semejanzas estructurales y funcionales que tienen la capacidad de aparearse entre sí y producir descendencia fértil. La especie es la unidad básica de clasificación.

El género agrupa a especies con parentesco cercano. La clasificación de los seres vivos involucra una jerarquización taxonómica, es decir, las especies se agrupan y forman un género, los géneros afines conforman las familias, las familias se agrupan formando *órdenes*, los órdenes forman clases y éstas divisiones (plantas) o phyllum (animales), las cuales se van a ubicar dentro de los reinos. El reino constituye el taxón de mayor agrupación dentro de las categorías taxonómicas. Ejemplo:

Clasificación del gato doméstico, el hombre y el maíz

Categoría	**Gato**	**Hombre**	**Maíz**
Reino	Animalia	Animalia	Plantae
Phyllum	Chordata	Chordata	Magnoliophyta
Clase	Mammalia	Mammalia	Liliopsida
Orden	Carnívora	Primates	Commelinales
Familia	Felidae	Hominidae	Poaceae
Género	*Felis*	*Homo*	*Zea*
Especie	*catus*	*sapiens*	*mays*

Desde los tiempos de Aristóteles, el mundo biótico se dividió en dos reinos, Plantae y Animalia. Posteriormente, Ernst Haeckel sugirió el reino Protista para incluir aquí aquellos organismos con características intermedias entre plantas y animales. En 1969, Whitaker propuso el reino Fungi para agrupar a los hongos y finalmente, los biólogos establecieron el reino Monera para agrupar en éste, a las bacterias y cianobacterias.

Actualmente se reconocen los cinco reinos. La clasificación moderna está basada en relaciones evolutivas. La sistemática se encarga de estudiar las relaciones evolutivas entre los organismos. Una vez definidas las relaciones, los organismos se pueden clasificar basados en ancestros comunes.

"Una meta de la clasificación es agrupar organismos según su grado de mayor relación" (Bernstein, 1998).

Características que agrupan a los organismos en los cinco reinos

Reino Monera: Incluye bacterias y cianobacterias. Todos estos organismos son procariotas (carecen de núcleo definido y otras organelas); son unicelulares; son desintegradoras, autótrofas quisiosintéticas y productores primarios.

Reino Protista: Incluye protozoarios, algas eucariotas y mohos deslizantes. Son eucariotes; principalmente unicelulares aunque también los hay pluricelulares. Algunos son de vida libre, otros forman asociaciones simbióticas y los hay también parásitos. Casi todos son acuáticos. Forman parte del plancton, algunos son patógenos y otros son productores de gran importancia. Probablemente dieron origen a los Reinos Fungi, Plantae y Animalia.

Reino Fungi: Agrupa hongos verdaderos, mohos, levaduras y setas. Son eucariotas de tipo vegetal, aunque carecen de clorofila y no son fotosintéticos. Son desintegradores, algunos son patógenos, los hay comestibles; algunos se utilizan en la elaboración de sustancias químicas industriales o antibióticos y otros echan a perder alimentos y las cosechas.

Reino Plantae: Plantas no vasculares y vasculares. Son eucariotes pluricelulares; adaptados para la fotosíntesis; las células fotosintéticas tienen cloroplastos. Paredes de celulosa. Crecimiento indeterminado. Son una fuente importante de oxígeno en la atmósfera del planeta.

Reino Animalia: Invertebrados y vertebrados. Heterotrofos pluricelulares eucariotas. Carecen de paredes celulares y, por lo general, tienen la capacidad de movilizarse por contracción muscular. Crecimiento de tipo determinado. Poseen una organización compleja: células, tejidos, órganos, sistemas de órganos. Constituyen la mayor parte de los consumidores de la biósfera. Existen alrededor de 35 filas, la mayor parte de ellos son marinos. De los terrestres, los artrópodos y cordados han sido los más exitosos. La mayoría se reproducen sexualmente con la participación de gametos (óvulo y espermatozoide).

RESUMEN

- El término clasificación se refiere al ordenamiento de los organismos vivos en grupos y categorías que tienen características en común.
- La idea de clasificar se inicia con Aristóteles (384-322 A.C.)
- Actualmente el sistema de clasificación se basa en el sistema original de Linneo y en un sistema de nomenclatura binario o binomial.
- La clasificación de los seres vivos involucra una jerarquización taxonómica.
- El *reino* constituye el taxón de mayor agrupación dentro de las categorías taxonómicas. Le siguen en su respectivo orden, el *Phyllum* o *división, clase, orden, familia, género* y *especie*.
- Para la identificación de organismos se utilizan elementos descriptivos llamados *claves taxonómicas*.
- Los reinos reconocidos en la actualidad por la mayoría de los científicos son los reinos: *Monera, Protista, Fungi, Plantae* y *Animalia.*

ACTIVIDADES

Después de haber internalizado las generalidades presentadas sobre la clasificación de los seres vivos, estarás preparado para responder las siguientes consignas de aprendizaje y evaluación:

- *Evaluación formativa*

a. Recolecte ejemplares de todos los seres vivos que se encuentran en ambientes terrestres o acuáticos. Observe el especímen, enumere y anote las características más importantes que tienen en común. Ahora trate de agrupar los organismos recolectados en tantos grupos como sea necesario, considerando sus semejanzas. En este momento, está usted clasificando o identificando? Explique.
b. ¿Qué significa el término clasificación?
c. ¿Qué son las claves taxonómicas?
d. Menciona las principales categorías de clasificación.
e. Elabore un cuadro comparativo de los cinco reinos estudiados, sus características distintivas y dé ejemplos representati vos de cada reino.

UNIDAD 9.
PRINCIPIOS DE ECOLOGÍA

Presentación

Los componentes vivos (bióticos) y no vivos (abióticos) de un ecosistema proporcionan una dinámica interna; un desequilibrio en una parte que el sistema no puede compensar, puede derrumbar el conjunto del sistema. En la naturaleza todo está relacionado; el sistema se estabiliza por sus propiedades dinámicas autocompensadoras. La manipulación arbitraria que ha sufrido el ambiente nos ha llevado a la crisis ecológica; conocedores de ello, tenemos que reflexionar en todos los rasgos del ecosistema, valorar su funcionamiento y entonces estaremos listos para protegerlo.

La presente unidad de aprendizaje tiene como propósito proporcionar un conocimiento básico de ecología, encaminado a adquirir una visión de desarrollo y calidad de vida que frene la crisis actual de los ecosistemas terrestres y acuáticos.

Se analizan algunos conceptos claves para comprender el funcionamiento de un ecosistema y nos ayudará a comprender la necesidad de la *armonía humana* con la *naturaleza*.

Todos los seres de la tierra estamos amenazados, comenzando por los pobres y marginados, y corremos el riesgo de perecer por causa de las prácticas humanas que ponen en peligro la existencia en el planeta. De ahora en adelante, todos los saberes y acciones deben enmarcarse desde una perspectiva ecológica, de tal forma que signifique la protección y promoción de la naturaleza.

Objetivos generales

Explicar el funcionamiento de los ecosistemas para su valoración.

Objetivos específicos

- Analizar los conceptos fundamentales empleados en ecología para relacionarlos con todos los constituyentes de un ecosistema.
- Comprender el funcionamiento de los ecosistemas para promover su conservación.

Ecología

El término *Ecología* fue acuñado en 1866 por el biólogo alemán Ernest Haeckel (1834 - 1919). Está compuesto de dos palabras griegas: *oikos*, que significa *casa* y *logos* que quiere decir "*reflexión o estudio*". Así que ecología quiere decir el estudio que se hace acerca de las condiciones y relaciones que reforman el hábitat (casa) del conjunto y de cada uno de los seres de la naturaleza. Es decir, el estudio de la interdependencia, de la interacción entre los organismos vivos y su ambiente, incluyendo los componentes vivos (bióticos)y los inertes(abióticos).

En la naturaleza nada existe de manera aislada; existe una complicada red de interconexiones entre los diferentes organismos vivos y entre las poblaciones, especies y organismos individuales y sus medios físico - químicos. Ningún animal, planta o microorganismo existe en aislamiento total y ningún factor (físico o biótico) opera en completa independencia.

La unidad ecológica es el *ecosistema*, formado por un grupo de poblaciones diversas e interactuantes que viven dentro de ciertos límites regionales. La región así delimitada (*habitat*) puede ser tan pequeña como una laguna o tan vasta como el *Desierto del Sahara*. Una *población* puede definirse como un grupo de organismos de la misma especie que viven junto en la misma región geográfica. Las diversas poblaciones interactuantes del ecosistema constituyen lo que se llama *comunidad*.

Cada población posee una cantidad única de características ecológicas: un nicho, una tasa de crecimiento y una capacidad de carga.

El *nicho* es la cantidad de recursos usados por una población. El estado de un organismo en el interior d una comunidad o ecosistema depende de las adaptaciones estructurales del organismo, sus respuestas fisiológicas y su conductas.

Los recursos más importantes en los nichos de las poblaciones animales son la comida y el albergue. La adquisición de comida implica qué comen los animales, cuándo buscan sus alimentos y dónde lo buscan. La construcción requiere encontrar una ubicación apropiada, al igual de materiales como ramas y pastos. Las distintas especies que viven en la misma región poseen nichos diferentes.

Los recursos más importantes de los nichos vegetales son habitualmente la humedad, la luz solar, la fuente de nitrógeno y la fuente de fósforo (fosfato). Las cantidades requeridas dependen de las adaptaciones específicas de cada planta.

Crecimiento poblacional

El crecimiento de una población está ligado al aumento del número de individuos, en relación con un tiempo dado y con el individuo por sí mismo. El hecho de que una población crezca, permanezca estable, o decline en número, refleja sus relaciones con el ambiente. El cambio en el número de individuos dentro de una población es una función del número de nacimientos, muerte, inmigración y emigración. La tasa máxima de crecimiento ocurre sólo cuando las condiciones son óptimas.

Capacidad de carga

Es la máxima cantidad de individuos de una especie (población) que un ambiente puede soportar. En forma natural, el tamaño de casi de todas las poblaciones es estable; este hecho se debe no sólo al *potencial reproductivo* de la especie en cuestión, sino también a la *influencia del ambiente*.

Cadenas y redes alimenticias

Una cadena alimenticia es una lista de especies a través de las cuales pasan las moléculas orgánicas. El primer grupo en la cadena trófica lo constituyen los productores, formados generalmente por plantas verdes, que convierten parte de la energía solar en moléculas orgánicas (por fotosíntesis) que usan y almacenan en sus tejidos.

Los animales que se alimentan de plantas verdes o de otros animales son los consumidores. Los consumidores secundarios se alimentan de los consumidores primarios; luego siguen en la cadena alimenticia los consumidores terciarios, cuaternarios, etc.

Los *desintegradores* están construidos por bacterias, hongos, plantas o animales que se nutren de organismos muertos y liberan la materia orgánica de dichos organismos para retomarla en la *cadena trófica*.

Las muchas cadenas alimenticias de un ecosistema se interconectan, debido a que cada herbívoro puede alimentarse de más de una especie vegetal y cada carnívoro de más de una especie animal. Además, un animal puede ser a su vez carnívoro primario y secundario.

Una *red alimenticia* es un diagrama de todas las cadenas alimenticias con sus interconexiones, dentro de un ecosistema: es el paso superior, después de la población en jerarquía de vida.

Flujo de energía

La energía dentro de los enlaces químicos de las moléculas orgánicas fluyen a través de la cadena alimenticia. Viaja a lo largo de una vía de una sola dirección del productor al herbívoro, de éste al carnívoro primario y a niveles más altos, así como también del material orgánico muerto a los descomponedores y a niveles más altos.

Debido a que cada organismo de la cadena trófica consume energía para reconstruir moléculas, transportan materiales y hacen muchos tipos de trabajos celulares, la *energía recibida por un organismo* no es transmitida en su totalidad al otro organismo; parte de ella se pierde en la cadena alimenticia. Es decir, la cantidad de energía química que fluye a través del ecosistema disminuye con cada nivel trófico. El flujo de la energía a través de la cadena alimenticia se puede representar mediante la *pirámide de energía*, donde a medida que se asciende en la pirámide el flujo de energía es menor.

Sucesiones ecológicas

El cambio paulatino en la constitución de la comunidad que ocupa un hábitat se llama *sucesión ecológica*. Una sucesión comienza con las rocas descubiertas o el suelo e involucra un cambio regular de organismos, en el cual los primeros colonizadores son reemplazados por otros. La sucesión culmina con una red alimentaria estable llamada *comunidad climax*.

Hay dos tipos principales de sucesión: *primaria* y *secundaria*.

El desarrollo de un ecosistema por primera vez es conocido como *sucesión primaria*, como por ejemplo un estanque, sedimentos arrastrados por los ríos, rocas, etc.

La *sucesión secundaria* es el desarrollo de un ecosistema después de una perturbación, tal como un incendio, un huracán, un alud o el arado de un campo. Toma menor tiempo que la sucesión primaria porque ya está presente un suelo, proveyendo alimentos, así como también semillas y otros organismos en etapas latentes.

Biomas

Un bioma es la mayor forma de paisaje, está conformado por muchos tipos similares de ecosistemas. Un bioma está a nivel más alto que un ecosistema en la jerarquía de la vida. Los biomas, a su vez, son los componentes de la biosfera, la cual incluye todas las porciones de la tierra donde hay vida. El tipo de biomas que se desarrolla sobre la tierra es controlado por el clima, y los biomas acuáticos, por características físicas ambientales como concentración de sales, velocidad de las corrientes y textura del sustrato de fondo. Son ejemplos de biomas terrestres: el bosque tropical lluvioso, desierto, chaparrales sabanas. Ejemplo de biomas acuáticos son los lagos, ríos, arrecifes coralinos, y otros.

Actividades

Después de haber leído y analizado la información contenida en esta unidad de aprendizaje sobre los principios de ecología, deberás estar en capacidad de realizar la siguiente evaluación:

- *Evaluación formativa*

a) Establezca la diferencia entre productor y consumidor; biótico y abiótico; nicho y hábitat; población y comunidad; sucesión primaria y sucesión secundaria.
b) Defina el concepto ecosistema y dé dos ejemplos de ecosistemas.
c) Enumere los componentes bióticos de un ecosistema y las funciones esenciales de cada componente.
d) Elige una comunidad de tu región. Identifica en ella uno de los caminos que sigue el alimento. Menciona los organismos que intervienen e indica si son productores o consumidores, y si son consumidores, qué orden les corresponde.
e) Se dice que el ecosistema se caracteriza por un equilibrio dinámico. ¿Qué significa esta información?
f) La labor de los descomponedores es muy importante para la comunidad. Anota al menos dos razones que hagan cierta esta afirmación.

BIBLIOGRAFÍA DE CONSULTA

Unidad 1

Audersirk, T., Audesirk, G.,y bruce E. , B. Biología. La vida en la tierra. 2003. Sexta edición. Pearson Educación. México

Curtis, H, Barnes, N. Sue, Flores, G. 2000 Biología. Secta en español. Editorial médica panamericana. Buenos Aires, Argentina.

Gutiérrez, J, León, V y otros. 2005. Temario para la prueba de conocimientos generales. Área científica.Dirección general de admisión. Universidad de Panamá.

Salomón, Berg, Martin, Villé. 1998. Biología de Villé. 4º edición. McGraw Hill Interamericana. México DF.

es.wikipedia.org/wiki/Biofísica –
es.wikipedia.org/wiki/Biología

Unidad 2

Audersirk, T., Audesirk, G.,y bruce E. , B. Biología. La vida en la tierra. 2003. Sexta edición. Pearson Educación. México

Avers, Charlotte, 1991. Biología celular. Grupo Editorial Iberoamericana S.A. México D:F. 748 pag.
González P, A. 1991. Biología molecular y celular. Editorial Trillas. México D:F. 197 pag.
Gutiérrez, J, León, V y otros. 2005. Temario para la prueba de conocimientos generales. Área científica.Dirección general de admisión. Universidad de

Panamá. mx.geocities.com/jackggz20/web/psicbiologica/lasmoleculasdelosseresvivos.htm

Unidad 3

TEM, M., Rincón, I. Serrano L. y otros. 2001. *Módulos de Biología*. Curso de preparatoria. Universidad Autónoma de Chiriquí. 26 p.

VILLÉ, Claude A. 1998. *Biología*. 8ª edición. McGraw-Hill. México. 1305 p.

Unidad 4

BERNSTEIN, Ruth. 1998 *Biología*. Décima Edición. McGraw-Hill. México. 729 p.

GÓMEZ, Carlos. 1990. *Investiguemos. 7. Ciencia Integrada*. XVI Edición. Editorial Voluntad. Bogotá. Colombia 224 p.

GONZÁLEZ Peña, A. 1997. *Biología Molecular y Celular*. Editorial Trillas. México. 197 p.

ORAN Raymond. 1985. *Biología. Sistemas Vivientes.* Tercera Edición. Compañía Editorial Continental S.A. México. D.F. 784 p.

SOLOMON Berg y Martín Villé. 1993 *Biología de Villé*. Tercera Edición. Mc Graw- Hill Interamericana. México. 1193 p.

VILLÉ, Claude A. 1981. *Biología.* Séptima Edición. Nueva Editorial Interamericana. México. D.F. 803 p.

WATH TOWER BIIBLE AND SOCIETY OF PENSYLVANIA: 22-10-1995._*Despertad* . La Torre del Vigía A.R. México D.F. 30 p.

Unidad 5

AVERS, Charlotte J. 1991. *Biología Celular y Molecular*. Segunda Edición. Grupo Editorial Interamérica. México D.F. 748 p.

BAKER J. A, Allen G. y otros _ *Biología e Investigación Científica.*

DE ABATE John. 1991. *Biología Aplicada.* Editorial Universidad Estatal a Distancia. San José, Costa Rica. 348 p.

WATH TOWER BIBLIE AND SOCIETY OF PENSYLVANIA 22-01-1997. Despertad. La Torre del Vigía A.R. México D.F. 30 p

FISCHER, S. y Sutter C. 2000. *El mundo viviente.* Segunda Edición. Editorial Tecnológica de Costa Rica.

KIMBALL, John. 1986. *Biología.* Cuarta Edición. Addison - Wesley Iberoamericana. Deware. USA.

VILLÉ, Claudé A. 1998. *Biología*. 8ª edición. McGraw-Hill. México. 1305 p.

Unidad 6

BERNSTEIN, Ruth. 1998 *Biología*. Décima Edición. McGraw-Hill. México. 729 p.

DE ABATE, John 1991. *Biología Aplicada*. Editorial Universidad Estatal a Distancia. San José, Costa Rica. 348 p.

KARP, G. 2008. Biología celular y molecular. Quinta edición. McGraw- Hill Interamericana Editores, S. A. de C.V. México D.F.. 776 p.

RINCON, I. Serrano L. y otros. 2001. *Módulos de Biología*. Curso de preparatoria. Universidad Autónoma de Chiriquí. 26 p.

SERRANO, A. y otros. 2001. *Módulos de Biología.* Curso de preparatoria. Universidad Autónoma de Chiriquí. 26 p.

VILLÉ, Claudé A. 1998. *Biología*. 8ª edición. McGraw-Hill. México. 1305 p.

Unidad 7

Gutiérrez, J, León, V y otros. 2005. Temario para la prueba de conocimientos generales. Área científica. Dirección general de admisión. Universidad de Panamá.

CORREA M., Peralta C. 1994. *Manual de Laboratorio de Bio. 121. Botánica*. Universidad de Panamá. 105 p.
HANSON, P., Ureña, H. y Vargas, S. 1995. *Historia Natural de los Filos / División*. Escuela de Biología. Universidad de Costa Rica. 14 p.
SANJUR, B., Serrano A. y otros. 2001. Curso de Preparatoria. Módulos de Biología. Universidad Autónoma de Chiriquí. 26 p.
WELCH, C., Shawer, J. y otros. 1978. *Ciencias Biológicas de la Molécula al Hombre*. Compañía Editorial Continental. S. A. México.

www.geocities.com/gcintron2002/actividad1.htm . Partes de la flor.

Unidad 9

BERNSTEIN, Ruth. 1998 *Biología*. Décima Edición. McGraw-Hill. México. 729 p.
GÓMEZ, Carlos. 1990. *Investiguemos. 7. Ciencia Integrada*. XVI Edición. Editorial Voluntad. Bogotá. Colombia 224 p.
OTTO, J.H., Towle, A. 1989. *Biología Moderna*. Undécima edición. McGraw-Hill. México
d) VILLÉ, Claude A. 1998. *Biología*. 8ª edición. McGraw-Hill. México. 1305 p.

MÓDULO INSTRUCCIONAL

ÁREA CIENTÍFICA

MATEMÁTICA

DOCUMENTO ELABORADO POR:

Sección de Aritmética / Elizabeth Martínez de Castillo
Sección de Álgebra / Ovidio Saldaña
Sección de Geometría Analítica / María Jilma Castillo

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

2013

Universidad Autónoma de Chiriquí

Ciudad Universitaria, David,
Chiriquí, República de Panamá
admision@unachi.ac.pa
Tel.:(507) 775-3485
Fax: (507) 774-2679
www.unaci.ac.pa

FICHA TÉCNICA
11 pulgadas
57 páginas
El contenido académico de este módulo, esta bajo la responsabilidad de los especialistas de la Facultad.

Publicado por la Dirección de Admisión, 2013

PRESENTACIÓN

Este material de estudio está dirigido a los estudiantes que desean ingresar a alguna de las carreras que ofrece la Facultad de Ciencias Naturales y Exactas, Enfermería o Medicina. Se tratan de una manera sencilla, temas básicos de Álgebra y de Geometría Analítica. Se estudian los conceptos básicos sobre Funciones Exponenciales, Funciones Logarítmicas y Funciones Trigonométricas. El conocimiento de estos temas es fundamental para el desarrollo adecuado de cursos posteriores de Cálculo.

Todas las carreras que ofrece la Facultad de Ciencias Naturales y Exactas contemplan en su Plan de Estudio uno o más cursos de Cálculo y por esto se requiere de una preparación adecuada de las nociones matemáticas en que éste se basa.

La importancia de los conceptos que presentamos se ilustran con ejemplos y al final de cada módulo se propone una serie de ejercicios que ayudarán al estudiante a dominar las técnicas para su solución.

Esperamos que los estudiantes se sientan comprometidos con el logro del conocimiento de los temas que les presentamos.

Sección de Matemática

Índice

SECCIÓN DE ARITMÉTICA

UNIDAD 0.

RAZONES, PROPORCIONES Y TANTO POR CIENTO

0.1. RAZÓN

Objetivos Específicos

- Definir razón.
- Distinguir los tipos de razón.
- Establecer la notación para razón geométrica.
- Definir razón geométrica.
- Identificar los términos de una razón
- Enunciar las propiedades de las razones geométricas.
- Resolver problemas de aplicación referentes a razón geométrica.

Razón

La *razón* es el resultado de comparar dos cantidades de la misma especie; o, simplemente la comparación entre dos números similares. La razón es un método muy útil de comparación.

Las cantidades en una razón se pueden comparar de dos formas:

- Determinando en cuánto excede una a la otra; es decir, restándolas.
- Determinando cuántas veces contiene una a la otra; es decir, dividiéndolas.

Entonces, existen dos tipos de razones: la *aritmética* o por diferencia y la *geométrica* o por cociente. En lo que sigue de esta unidad, trabajaremos con razones geométricas.

Razón geométrica

La *razón geométrica* de dos cantidades es el cociente indicado de sus valores.

Toda razón geométrica se puede escribir en las formas siguientes:
Como una división: $a \div b$
Con dos puntos o signo de razón: $a : b$
Como una fracción:

ab ó $\frac{a}{b}$

Ejemplos

- La razón de 3 a 5 se puede expresar como $3/5$ ó $3 \div 5$ ó $3 : 5$.
- Si una clase en la universidad tiene un total de 40 estudiantes, de los cuales, 15 son mujeres y 25 son hombres, entonces
  a) La razón de mujeres a hombres es de 15 a 25, que también se puede expresar como 15:25 ó $\frac{15}{25}$. Esta razón se puede reducir a $\frac{3}{5}$ y se puede interpretar así:
     - Existen tres mujeres por cada cinco hombres en la clase, o
     - En la clase hay tres quintas partes de mujeres en comparación a los hombres.
  b) La razón de hombres al total de estudiantes es $\frac{25}{40}$. Esta razón

se puede reducir a $\frac{5}{8}$ y esto indicaría que:

- Cinco octavas partes de la clase son hombres, o
- De cada 8 estudiantes, 5 son hombres.

Nótese que, el número al que se le hace la comparación es siempre el denominador de la fracción y, como la razón expresada en esta forma, es una fracción, se puede utilizar como fracción en los cálculos. Además, al igual que en cualquier otra fracción, la razón puede ser menor que, igual a, o mayor que 1.

Ejemplo

Considerando el ejemplo anterior, si en una segunda clase hay 55 estudiantes, incluyendo 15 mujeres. Entonces,

- La razón de mujeres en la primera clase a mujeres en la segunda clase es de $\frac{15}{15}$, o sea 1.
- La razón del número de estudiantes en la segunda clase al número de estudiantes en la primera clase es de $\frac{55}{40}$, o sea $\frac{11}{8}$, que es más de 1.

Términos de una razón

En una razón, el primer término se denomina *antecedente* y el segundo término *consecuente*.

Ejemplo

En la razón 3:5; el antecedente es 3 y el consecuente es 5.

Propiedades de las razones geométricas

Como las razones geométricas se pueden considerar como una fracción, entonces éstas satisfacen las siguientes propiedades de las fracciones:

- Si el antecedente de una razón se multiplica o divide por un número diferente de cero, ella queda multiplicada o dividida por ese mismo número.
- Si el consecuente de una razón se multiplica o divide por un número diferente de cero, la razón queda dividida en el primer caso y multiplicada en el segundo, por el mismo número.
- Si el antecedente o el consecuente de una razón se multiplican o dividen por un mismo número, la razón no varía.

Problemas de aplicación

1. **Problemas generales**

   Para encontrar la razón entre dos cantidades, se escribe la razón en forma de fracción y se simplifica, si es posible, hasta reducirla a su mínima expresión.

Ejemplos

- La razón de 56 y 7 es igual a la razón de 8:1; ya que, se considera el cociente de ambos números y luego se procede a reducirlo a su mínima expresión. O sea, dividiendo ambos términos por 7, se obtiene $\frac{56}{7}=\frac{8}{1}$.

- Para reducir la razón $\frac{2}{3}:\frac{4}{9}$ a su mínima expresión, se considera la razón dada como una fracción, o sea $\frac{2}{3}:\frac{4}{9}=\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{9}{4}\right)=\frac{3}{2}$. Luego, la razón $\frac{2}{3}:\frac{4}{9}$ es igual a 3:2.

- Para encontrar la razón de las edades de dos niños de 10 meses y 2 años, primero se transforman los dos años a meses, o sea 2 años equivalen a 24 meses, y luego se considera el cociente de 10 meses y 24 meses, y se simplifican las cantidades similares; es decir, $\frac{10 \text{ meses}}{2 \text{ años}}=\frac{10 \text{ meses}}{24 \text{ meses}}=\frac{5}{12}$

  Luego la razón de 10 meses y dos años es 5:12.

ACTIVIDAD 1

Escriba las siguientes razones como fracciones y redúzcalas a los términos mínimos.

1. Hallar la razón de:

a. 50 pies a 90 pies	c. 10 yardas a 8 pies.
b. 12 minutos a 2 horas.	d. 45 monedas de 10 centavos a 5 dólares.

2. Hallar la razón de:

a. 60 y 12.	c. 5.6 y 3.5
b. $\frac{12}{11}$ y $\frac{6}{5}$	d. $\frac{3}{8}$ y 0.02

3. Un estudiante realiza 13 exámenes durante el semestre y aprobó 9.
   a. ¿Cuál es la razón de exámenes aprobados en comparación con los exámenes realizados?
   b. ¿Cuál es la razón de exámenes reprobados en comparación con los aprobados?

4. Una familia tiene un ingreso semanal por concepto de sueldo de B/.320.00. Se gastan B/.80.00 a la semana en comida, B/.25.00 a la semana en gasolina y B/.90.00 a la semana en alquiler de la casa.
   a. ¿Cuál es la razón de gastos por alimentación en comparación a los gastos por gasolina?
   b. ¿Cuál es la razón del importe gastado en alquiler en comparación con los gastos por alimentos?
   c. ¿Cuál es la razón de gastos de gasolina al sueldo neto recibido?

5. Durante el período de ventas de mediados de agosto de 1983, los tres grandes fabricantes de automóviles en Estados Unidos (General Motors-GM, Ford y Chrysler) vendieron 153000 automóviles nuevos. De éstos, las ventas de GM fueron 97000.
   a. ¿Cuál es la razón de las ventas de GM en comparación con el total de venta de automóviles nuevos?
   b. ¿Cuál es la razón del número de los automóviles de GM vendidos en comparación con el número de automóviles vendidos por los demás fabricantes de automóviles estadounidenses?

6. En junio de 1983 existían 102.5 millones de personas empleadas en Estados Unidos y 11.1 millones desempleados.
   a. ¿Cuál es la razón de trabajadores desempleados en comparación con la fuerza laboral total?
   b. Redonde la respuesta de la parte a) e interprétela.
   c. ¿Cuál es la razón de personas empleadas a personas desempleadas?

7. Una tienda minorista compró una lámpara en B/.25.00 y la vendió a B/.40.00. La ganancia bruta (la diferencia entre el costo y el precio de venta) fue B/.15.00. Determinar e interpretar las siguientes razones que pueden ser de utilidad para la tienda:
   a. Costo a precio de venta.
   b. Ganancia bruta a precio de venta.
   c. Ganancia bruta al costo.

B. Problemas de repartimiento proporcional

Los problemas de repartimiento proporcional son aquellos problemas en los cuales hay que "*obtener una cantidad de acuerdo con una razón dada*". Para resolver este tipo de problemas se deben realizar los siguientes pasos:

- Se suman los términos de la razón.
- Se forman las fracciones con cada término de la razón, dividido entre la suma de ellos.
- Se multiplican estas fracciones por la cantidad a repartir.

Ejemplos

- Entre tres comerciantes A, B y C se deben distribuir 1600 kilos de café a razón de 8:11:13. ¿Cuántos kilos recibirá cada comerciante?

  Solución

  - Se suman los términos de la razón, o sea 8 + 11 + 13 = 32.
  - Se forman las fracciones correspondientes a cada término de la razón dada respecto a la suma de ellos; o sea, $\frac{8}{32}, \frac{11}{32}$ y $\frac{13}{32}$.
  - Finalmente, se multiplican estas fracciones por la cantidad a dividir

    ;

    y

$$\frac{8}{32}(1600) = 400 \quad \frac{11}{32}(1600) = 550$$

$$\frac{13}{32}(1600) = 650$$

Luego, el comerciante A recibirá 400 kilos de café, el comerciante B recibirá 550 kilos de café y el comerciante C recibirá 650 kilos de café. Para comprobar los resultados obtenidos, se consideran los cocientes de éstos y se verifica si están en la razón dada originalmente; esto es,

$\frac{400}{550} = \frac{8}{11}$, o lo mismo, 8:11

$\frac{400}{650} = \frac{8}{13}$, o lo mismo, 8:13

$\frac{550}{650} = \frac{11}{13}$, o lo mismo, 11:1

- Entre dos comerciantes X, Y compraron 720 refrigeradoras en una razón 4:5. ¿Cuántas refrigeradoras compró cada uno?

  Solución:

  - La suma de los términos de la razón es igual a 4 + 5 = 9.
  - Las fracciones correspondientes a los términos de la razón respecto a la suma de éstos son $\frac{4}{9}$ y $\frac{5}{9}$.
  - Al multiplicar cada fracción por el total a repartir, se obtiene que

$$\frac{4}{9}(720) = 320 \quad \text{y} \quad \frac{5}{9}(720) = 400.$$

Luego, al comerciante X le corresponden 320 refrigeradoras y al comerciante Y, 400 refrigeradoras.

ACTIVIDAD 2

Resuelva los siguientes problemas:

1. Dos almacenes B, C deben repartirse 120 camas en la razón 2:3. ¿Cuántas camas le corresponden a cada uno?
2. Se deben distribuir B/.200,000.00 de herencia entre tres herederos, Pedro, Juan y José, en la razón 5:14:21.
   a. ¿Cuánto recibirá cada heredero?
   b. ¿Qué diferencia hay entre la parte mayor y la parte menor que se distribuye?
3. Una aleación contiene tres metales A, B, C en la razón 1:4:6. Encontrar la cantidad de cada metal en 99 Kg de aleación.
4. Una fábrica tiene 108 empleados y están distribuidos en 4 secciones A, B, C, D en la razón 1:3:5:9. ¿Cuántos empleados tiene cada sección?
5. En una casa existe una entrada mensual de B/.680.00, aportados por el padre y la madre en la razón 3:2. ¿Cuánto aporta cada uno?
6. Una compañía obtuvo de ganancia anual B/.1,800.00 y ésta se repartió entre los socios A, B y C en la razón 4:6:14.¿Qué cantidad de dinero le correspondió a cada socio?
7. Entre los niños de tres ciudades X, Y, Z se distribuirán 600 pares de calzados, en una razón de 7:11:12. ¿Cuántos pares de calzados le corresponden a cada ciudad?

1. PROPORCIÓN

Objetivos Específicos

- Definir proporción.
- Establecer la notación para proporciones.
- Identificar los elementos de una proporción.
- Enunciar la propiedad fundamental de las proporciones al determinar algún término desconocido de las mismas.
- Identificar los tipos de proporciones.
- Resolver problemas de aplicación de las proporciones, según el tipo correspondiente.

Proporción

Una *proporción* es la igualdad entre dos razones.

Las proporciones se pueden escribir de dos formas diferentes:

- Como la igualdad de dos fracciones: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$
- Con el signo de proporción (cuatro puntos ::): a:b::c:d, que se leerá: "*a* es a *b* como *c* es a *d*".

Ejemplos

1. **La proporción $\frac{8}{4}=\frac{24}{12}$, también se puede escribir como 8:4 :: 24:12.**

- La proporción $\frac{2.4}{0.04}=\frac{24}{0.4}$, se puede escribir como 2.4: 0.04 :: 24:0.4.

A los elementos de una proporción se les llama *términos*. El primer y cuarto término reciben el nombre de *extremos* y, el segundo y tercer término se conocen como *medios*.

Ejemplos

- En la proporción $\frac{5}{6}=\frac{15}{18}$; los términos de ésta son 5, 6, 15 y 18; los medios son 6 y 15, y los extremos son 5 y 18.
- En la proporción 2:10::6:30, los extremos son 2 y 30, y los medios son 10 y 6.

Propiedad fundamental de las proporciones

La propiedad fundamental de las proporciones nos dice "en toda proporción el producto de los medios es igual al producto de los extremo". En general, para la proporción *a*:*b*::*c*:*d*, según esta propiedad, se tiene que *a* x *b* = *c* x *d*.

Ejemplo

En la proporción 3:4::6:8, según la propiedad fundamental, se tiene que

$$4 \times 6 = 3 \times 8 \Rightarrow 24 = 24$$

Propiedad de los extremos y de los medios

De la propiedad fundamental de las proporciones se derivan las dos propiedades siguientes:

- En toda proporción, un *extremo*

es igual al producto de los medios dividido por el otro extremo. Así, de la expresión general *a*:*b*::*c*:*d* se obtiene que los extremos a y d están dados, respectivamente, por

$a = \frac{bxc}{d}$ y $d = \frac{bxc}{a}$.

- En toda proporción, un *medio* es igual al producto de los extremos dividido por el otro medio. Así, de la expresión general *a*:*b*::*c*:*d* se obtiene que los medios b y c están dados, respectivamente, por $b = \frac{axd}{c}$ y $c = \frac{axd}{b}$.

ACTIVIDAD 3

Encuentre el término desconocido en las siguientes proporciones:

1. 2 : 3 :: 4 : x	2. 20 : 10 :: x : 6
3. 2 : x :: 8 : 24	4. x : 25 :: 10 : 2
5. 0.04 : 0.05 :: 0.06 : x	6. 2 : 4 :: 5 : x
7. $\frac{1}{3}:\frac{1}{5}::x:\frac{2}{3}$	8. $5:\frac{1}{2}::x:0.04$
9. $0.03:x::\frac{1}{6}:\frac{2}{9}$	10. $x:\frac{1}{5}::6:2$

Tipos de proporciones

Existen dos tipos de proporciones, la *directa* y la *inversa*.
La *proporción directa* es aquella en la cual dos valores están relacionados de tal manera que, el aumento o disminución en uno, causa el aumento o disminución correspondiente en el otro.

Ejemplo

Las siguientes magnitudes (valores variables) están directamente relacionadas, o sea en proporción directa:

- A mayor velocidad, mayor la distancia recorrida.
- A mayor cantidad de hombres trabajando, mayor cantidad de trabajo realizado.
- A menor cantidad de artículos comprados, menor costo.

La *proporción inversa* es aquella en la cual dos valores están relacionados de tal manera que, el aumento en una, motiva un decrecimiento correspondiente en el otro, y viceversa.

Ejemplo

Las siguientes magnitudes (valores variables) están inversamente relacionadas, o sea en proporción inversa:

- A mayor velocidad, menor tiempo.
- A menor cantidad de hombres en un trabajo, mayor el tiempo empleado en hacerlo.
- A mayor oferta, menores precios.

Problemas de aplicación

El método para resolver problemas de aplicación referentes a proporciones, consta de los siguientes pasos:

a) Escribe dos columnas, cada una de ellas con los valores correspondientes o de la misma clase.

b) Forma razones con los valores de cada columna.

c) Forma y resuelve la proporción, atendiendo a:
   - Si la proporción es directa, ella se obtiene igualando las dos razones.
   - Si la proporción es inversa, ésta se forma igualando una razón con la inversa de la otra.

Ejemplos

- Una persona que debe B/.1500.00, conviene con sus acreedores en pagar B/.0.75 por cada dólar adeudado. ¿Cuánto tiene que pagar?

Solución

a) Las dos columnas son:

Cantidad adeudada (B/.)	Cantidad pagada (B/.)
1.0	0.75
1,500.00	

b) Las dos razones son:

$\frac{1}{1500}$; $\frac{0.75}{x}$

c) La proporción es $\frac{1}{1500}=\frac{0.75}{x}$, que es directa; por lo que, aplicando la propiedad fundamental, se obtiene

$$x=\frac{(1500)(0.75)}{1}=1125$$

Luego, la persona tiene que pagar B/.1125.00.

- Una cuadrilla de obreros emplea 14 días, trabajando 8 horas diarias, en realizar cierta obra. Si hubieran trabajado una hora menos al día, ¿En cuántos días habrían terminado la obra?

Solución

Las dos columnas son:

Días	Horas
14	8
x	7

a) Las dos razones son: $\frac{14}{x}$; $\frac{8}{7}$

b) Como la proporción es inversa (menos horas de trabajo implica utilizar más obreros), entonces se invierte una de las dos razones y se obtiene la proporción $\frac{14}{x}=\frac{7}{8}$. Ahora, aplicando la propiedad fundamental ésta se resuelve y se encuentra que

$$x=\frac{(14)(8)}{7}=16$$

Luego, si se hubiera trabajado una hora menos al día, la obra se habría terminado en 14 días.

ACTIVIDAD 4

Resuelve los siguientes problemas:

1. Si 4 libros cuestan B/.20.00, ¿cuánto costarán 5 docenas de libros?.
2. Ganando B/.3.15 en cada metro de tela vendido, ¿cuántos metros se han vendido, si la ganancia ha sido B/.945.00?
3. Una guarnición de 1 300 hombres tiene víveres para cuatro meses. Si se quiere que los víveres duren 10 días más, ¿cuántos hombres habrá que retirar de la guarnición?
4. A la velocidad de 30 Km/h un automóvil emplea $8\frac{1}{4}$ horas en efectuar un recorrido. ¿Cuánto tiempo menos hubiera tardado si la velocidad hubiera sido el triple.?
5. Si 9 hombres pueden hacer una obra en 5 días
   - ¿Cuántos hombres más harán falta para hacer la obra en un día.?
   - ¿Cuántos hombres menos harán falta para hacerla en 15 días.?
6. Dos individuos alquilan una finca. El primero ocupa los $\frac{5}{11}$ de la finca y paga por el alquiler B/.6 000.00 al año. ¿Cuánto paga de alquiler anual el segundo?

1.3. TANTO POR CIENTO

Objetivos Específicos

- Definir porcentaje.
- Transformar un porcentaje (%) a fracción común.
- Transformar un porcentaje (%) a fracción decimal.
- Transformar un número a porcentaje (%)
- Resolver problemas de aplicación de porcentaje según el caso respectivo.

Porcentaje

Se denomina *tanto por ciento*, o simplemente *porcentaje* de un número, a una o varias de las cien partes iguales en que se puede dividir el número; es decir, uno o varios centésimos de un número.

Para denotar el tanto por ciento de un número, al número correspondiente se le agrega el símbolo %. El equivalente aritmético del símbolo % es $\frac{1}{100}$ ó 0.01, o sea, $\% = \frac{1}{100} = 0.01$.

Obsérvese que, aunque el signo de porcentaje (%) es conveniente y se utiliza comúnmente en la escritura, éste no es utilizado en los cálculos. Èste, tiene un valor aritmético definido antes de comenzar a realizar cualquier cálculo, o sea, que la cantidad presentada como porcentaje, se tiene que cambiar a una fracción común equivalente o a su decimal respectivo. Es decir, con esto se cambia la forma, pero no el valor de la expresión.

Ejemplo

Ochenta por ciento, se escribe 80%; pero, a su vez, 80% = $80\left(\frac{1}{100}\right) = 0.08$.

Transformación de un porcentaje % a fracción común

Para transformar un porcentaje a fracción común, se elimina el signo de porcentaje (%), se multiplica el número por $\frac{1}{100}$ y se simplifica, si es posible.

Ejemplos

$25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$; $75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$;

$\frac{1}{2} = \frac{12}{100} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{100} = \frac{1}{200}$

ACTIVIDAD 5

Transforme los siguientes porcentajes a fracción común y exprese la respuesta en la forma más simple:

1. 14%	5. 0.81%	9. 1%
2. $12\frac{1}{2}$ %	6. 99.44%	10. $\frac{2}{5}$ %
3. $\frac{5}{8}$ %	7. 7.01%	11. 500%
4. 134%	8. 75%	12. 0.05%

Transformación de un porcentaje (%) a fracción decimal

Para transformar un porcentaje a fracción decimal, se elimina el símbolo de % y se divide la cantidad entre 100, o lo mismo, se desplaza el punto decimal dos lugares hacia la izquierda y se elimina el símbolo de porcentaje (%).

Ejemplos

$15 = \frac{15}{100} = 0.15$; $8.5 = \frac{8.5}{100} = 0.085$;

$6\frac{3}{4} = \frac{6.75}{100} = 0.0675$

ACTIVIDAD 6

Transforme los siguientes porcentajes a fracción decimal:

1. 25%	5. 0.381%	9. 1%
2. $15\frac{1}{2}$ %	6. 65.8%	10. $\frac{2}{5}$ %
3. $3\frac{5}{8}$ %	7. 7.05%	11. 200%
4. 120%	8. 45%	12. 0.084%

Transformación de un número a porcentaje (%)

Para transformar un número a porcentaje, éste se multiplica por 100 y se le agrega el símbolo %.

Ejemplos

0.28 = 0.28 x 100% = 28%
0.0525 = 0.0525 x 100%

0.01 = 0.01 x 100% = 1%

$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times 100 = 25$

ACTIVIDAD 7

Transforme los siguientes números a porcentajes:

1. 12	5. 1.85	9. 1
2. 1.3	6. 6.77	10. $\frac{18}{25}$
3. 0.093	7. 0.024	11. $\frac{1}{8}$
4. $\frac{1}{2}$	8. $\frac{4}{5}$	12. 0.00998

Problemas de aplicación

A. Casos particulares

Generalmente, los problemas de aplicación de tanto por ciento se dividen en tres tipos:

Hallar el tanto por ciento de un número dado.

Ejemplos

- Hallar el 15% de 720.

  Solución

  Con los valores dados, se forma y se resuelve la proporción directa siguiente:

Número	%
720	100
X	15

Entonces, $x = \frac{720(15)}{100} = 108$. Luego, el 15% de 720 es 108.

Hallar el $\frac{3}{5}$ de 54.

Solución

Con los valores dados, se forma y se resuelve la proporción directa siguiente:

Número	%
54	100
x	$\frac{3}{5}$

Entonces, $x = \frac{54\ (\frac{3}{5})}{100} = \frac{81}{250}$ Luego, el $\frac{3}{5}$ de 54 es $\frac{81}{250}$.

- **Hallar un número cuando se conoce un tanto por ciento de él.**

Ejemplos

- De qué número es 9 el 4%?

  Con los valores dados, se forma y se resuelve la proporción directa siguiente:

Número	%
x	100
9	4

Entonces, $x = \frac{9(100)}{4} = 225$

Luego, 9 es el 4% de 225.

- De qué número es 16 el $\frac{1}{4}$?

Solución

Con los valores dados, se forma y se resuelve la proporción directa siguiente:

Número	%
x	100
16	$\frac{1}{4}$

Entonces, $x = \frac{16\ (100)}{\frac{1}{4}} = 6400$. Luego, 16 es el $\frac{1}{4}$ de 6400.

- Dados dos números, calcular qué tanto por ciento es uno del otro.

Ejemplos

- Qué porcentaje (%) de 860 es 129?

Con los valores dados, se forma y se resuelve la proporción directa siguiente:

Número	%
860	100
129	x

Entonces, $x=\frac{129(100)}{860}=15.$ Luego, 129 es el 15% de 860.

- Qué porcentaje (%) de 93 es 0.186?

Con los valores dados, se forma y se resuelve la proporción directa siguiente:

Número	%
93	100
0.186	x

Entonces, $x=\frac{0.186(100)}{93}=0.2$. Luego, 0.186 es el 0.2% de 93.

ACTIVIDAD 8

Resuelve los siguientes problemas, según lo indicado:

A. Hallar el:

1. 10% de 1500	6. 5.35% de 67
2. 42% de 1250	7. $16\frac{2}{3}$ de $15\frac{3}{4}$
3. $\frac{2}{9}$ de 580	8. 1% de 100
4. 3.75% de 25	9. 4% de $\frac{1}{50}$
5. $6\frac{1}{2}$ de 1854.25	10. 5% de 750.898

B. De qué número es:

1. 40 el 5%	6. 420 el 65%
2. 13 el 20%	7. 180 el $15\frac{3}{4}$ %
3. 24 el $\frac{1}{16}$	8. 875 el 10%
4. 3.75 de 25%	9. 4 de $\frac{1}{50}$ %
5. 12 el 25%	10. 27.85 el 22%

C. Qué porcentaje (%) de:

1. 1950 es 156	6. 24 es 2.4052
2. 815 es 431.95	7. 85 es 2.7625
3. 40 es 0.30	8. 615 es 33.825
4. 2.75 es 3.5	9. 20 es $\frac{3}{4}$
5. 68 es 272	10. 512 es 0.64

B. Problemas generales

En la práctica, generalmente cualquier problema donde intervenga el tanto por ciento se puede resolver con los conocimientos adquiridos sobre proporción directa; ya que todo problema de este tipo corresponde a una proporción directa, en donde sus elementos relacionan las cantidades con sus respectivos valores en por ciento.

Ejemplos

En una fábrica, el 8% de las máquinas se descomponen y son reemplazadas por otras nuevas. ¿Cuántas máquinas habían en la fábrica si las máquinas reemplazadas fueron 144?

Solución

a) Las dos columnas son:

Número	%
x	100
144	8

Las dos razones que se forman son:

$\frac{x}{144}$; $\frac{100}{8}$

b) La proporción obtenida es

$\frac{x}{144} = \frac{100}{8}$, que es directa; por lo que, aplicando la propiedad fundamental,

se obtiene $x = \frac{(144)(100)}{8} = 1800$

c) Luego, en la fábrica habían 1800 máquinas.

Jardines S. A. Compró 200 pequeñas plantas a B/.1.08 cada una. Si consideran que 15 plantas morirán antes de ser vendidas, ¿a qué precio deben vender las plantas sanas si quieren un margen de utilidad bruta del 46% del costo?

Solución

El costo total de las plantas es: 200 (B/.1.08) = B/.216.00
Para determinar el 46% del costo, se considera lo siguiente:

B/.	%
216	100
x	46

De donde, al resolver la proporción

$\frac{216}{x} = \frac{100}{46}$, se obtiene que

$$x = \frac{(216)(46)}{100} = 99.36$$

O sea, que la utilidad bruta es igual a B/.99.36.

Entonces, el costo total más la utilidad bruta es:

B/.216.00 + B/.99.36 = B/.315.36

Como son 185 plantas las que quedan para la venta (200 – 15 = 185), entonces 315.36 185 = 1.71, o sea, B/.1.71. Para obtener un margen de utilidad del 46% del costo, las plantas sanas se deben vender a B/.1.71 cada una.

Pedro tenía B/.80.00. Si gastó el 20% y dio a su hermano el 15% del resto, ¿cuánto le queda?

Solución

Para determinar lo que Pedro se gastó, se considera y resuelve la proporción

B/.	%
80	100
x	20

Entonces, $x = \frac{80(20)}{100} = 16$ O sea, que él se gastó B/.16.00

Por otro lado, el resto que le quedó es : 80.00 - 16.00 = 64.00; o sea, B/.64.00, y para determinar lo que le dio a su hermano se considera la siguiente proporción:

B/.	%
64	100
x	15

Entonces, $x = \frac{64(15)}{100} = 9.60$, o sea B/.9.60. Así, la suma de lo que se gastó y lo que le dio al hermano es: B/.16.00 + B/.9.60 = B/.25.60. Así, al hermano le dio B/.9.60. Luego, B/.80.00 - B/.54.40 = B/.54.50. Es decir, que a Pedro le quedan B/.54.50

ACTIVIDAD 9

Resuelve los siguientes problemas:

1. Un fabricante de mercancías enlatada utiliza un margen de utilidad bruta del 28% del costo total para fijar precio a su mercancía. Si fabricar una lata de frutas cuesta B/.1.59, ¿a qué precio debe venderla?
2. Una finca tiene 480 hectáreas. El 35% de la mitad de la finca está sembrada de caña y el resto de la finca de frutas menores. ¿Cuántas hectáreas se tienen sembradas con frutas menores?
3. Las ventas de un almacén durante

un año, han importado B/.18675.00. De esa cantidad, el 64% se destina a gastos. ¿Cuál ha sido la ganancia?

4. Una compañía adquiere un propiedad de 1800 caballerías de la siguiente manera: el 22% de la finca lo paga a B/.2000.00 la caballería; el 56% a B/.800.00 la caballería y el resto a B/.500 la caballería. ¿Cuánto es el importe de la compra?
5. Se incendia una casa que estaba asegurada en el 86% de su valor y se cobran B/.4300.00 por el seguro. ¿Cuál era el valor de la casa?
6. Una silla para la cocina que cuesta B/.29.32 se vendió en B/.52.95. Determine el porcentaje del margen de utilidad bruta sobre:
   a. El costo ,y
   b. El precio de venta.

(Redondee las respuestas al porcentaje completo más cercano).

SECCIÓN DE ÁLGEBRA

UNIDAD 1. ORDEN CRECIENTE Y DECRECIENTE DE UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA

Un polinomio esta ordenado, si sus términos aparecen de forma tal que los exponentes de una letra escogida como ordenatriz, guarden un orden: (según el orden de los números naturales) en forma ascendente o descendente.

Ejemplo

Ordenar la expresión,
$6a^3x^2 - 5a^3 + 2a^2x + x^3 - x^4$,
en orden ascendente respecto a letra x.
Al ordenar la expresión tenemos:
$-5a^3 + 2a^2x + 6ax^2 + x^3 - x^4$.

Ejemplo

Ordenar la expresión,
$-x^8y^2 + x^{10} + 3x^4y^6 - x^6y^4 + x^2y^8$
en orden descendente respecto a y.
Ordenando la expresión tenemos:
$x^2y^8 + 3x^4y^6 - x^6y^4 - x^8y^2 + x^{10}$

ACTIVIDAD 1

- Ordenar las siguientes expresiones algebraicas en forma ascendente con respecto a la variable **y**.
  a) $2y^3 - 3 + 4y^2 + y^5$
  b) $y^5 + 5y + y^4 – y^3$
  c) ${}^2/_3\, y^3 + {}^3/_5 y^4 - 6y^2 - 2y^6 - 12$
  d) ${}^1/_2 y^5 + by^3 + 5by - y^4$

- Ordenar las siguientes expresiones algebraicas en forma descendente con respecto a la variable **x**.
  a) $10x^3yz^2 - 11 + 23xyz$
  b) $5x^4 - 15x^2 + 3x^3 - 10 + 20x$
  c) $29x^3 - 7x^2a^2 - 2x^5 - 8xy + a^3 + 7x^4$
  d) $12z^4b^7x^2 - {}^1/_3 a^4b^3x^3 - {}^1/_2 ab$

UNIDAD 2. VALORIZACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Valorizar una expresión algebraica consiste en sustituir cada variable por el valor asignado en el problema, y luego, efectuar las operaciones indicadas en la expresión.

Observación : Las operaciones se resuelven en el siguiente orden:
a) Potencias y raíces.
b) Multiplicaciones y divisiones.
c) Sumas y restas.
d) Si hay paréntesis, éstos se resuelven primero; aplicando siempre el orden anterior.

Ejemplo

Valorizar la expresión; $a^2 - 2ab + b^2$, para a = 3 y b = 4. Sustituyendo los valores de cada variable y resolviendo la expresión tenemos:

$$\begin{aligned} a^2 - 2ab + b^2 &= (3)^2 - 2(3)(4) + (4)^2 \\ &= 9 - 24 + 16 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ejemplo

Valoriza la expresión: $\dfrac{b-a}{n} + \dfrac{m-b}{d} + 5a$
para los valores a = 3, b = 4, d = ${}^1/_2$, m = 6, n = ${}^1/_4$.

Sustituyendo los valores de cada variable y resolviendo la expresión tenemos:

$$\frac{b-a}{n}+\frac{m-b}{d}+5a = \frac{4-3}{\frac{1}{4}}+\frac{6-4}{\frac{1}{2}}+5(3)$$

$= 1(4) + 2(2) + 15$
$= 4 + 4 + 15$
$= 23$

ACTIVIDAD 1

Valorice las siguientes expresiones según los valores indicados.

1) $4x - 2y + 5$; para $x = 1$, $y = 2$.
2) $2x - 5y + 13$; para $x = -2$, $y = 3$
3) $-6x + y - 2z + 10$; para $x = {}^1/_3$, $y = 2$, $z = -{}^1/_2$
4) $a - 3b + {}^1/_2 c + 10$; para $a = {}^3/_4$, $b = -{}^1/_5$, $c = -5$
5) $(4x - 2y) - 10x + 4$; para $x = 2$, $y = 1$.

UNIDAD 3.
OPERACIONES ENTRE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

3.1 Adición entre monomios y polinomios

Adición de monomios semejante

Se denominan *términos semejantes* o *monomios semejantes*, a todos los términos que tienen la misma parte literal; o sea, que tienen las mismas letras y las letras iguales están elevadas a exponentes iguales.

Ejemplos

$4y$ con $-3y$; $-2x^2y$ con $-{}^3/_4 x^2y$; $-2b^3cd^2$ con $5cd^2b^3$

Regla

Para sumar monomios semejantes, sumamos sus coeficientes atendiendo a las siguientes reglas. Luego al resultado le agregamos la parte literal.

- Si los números tienen igual signo, súmelos y al resultado le antepone el signo común.
- Si los números tienen signo diferente, réstele al número de mayor valor numérico el otro número; y al resultado le antepone el signo de la cantidad con mayor valor numérico.

Ejemplos

- Sumar: $4x$, $-5x$, $+7x$.
  Comotodossonmonomiossemejante, sumaremos sus coeficientes y le

colocamos la parte literal.

$4x - 5x + 7x = 11x - 5x$ sumando los números de signos iguales (regla 1)

$= 6x$ restamos los números de signos diferentes (regla 2)

- Sumar: $3y^2$, $-5x$, -4

  Como los monomios son no semejantes, su suma queda indicada.

  $3y^2 + (-5x) + (-4) = 3y^2 - 5x - 4$.

- Sumar: $3xy^2$, $-2x^2y$, $-6xy^2$, $-6x^2y$.

  $3xy^2 - 2x^2y - 6xy^2 - 6x^2y = -3xy^2 - 8x^2y$. Sólo sumamos los términos semejantes.

Adición de polinomios

Para sumar dos o más polinomios, los escribimos uno debajo del otro, de manera que los monomios semejantes queden en columna. Luego sumamos los términos monomios de cada columna según la regla anterior.

Ejemplos

- Sumar: $4a - 3b + 5c$; $2a - 4c + 7b$.

  Colocamos los polinomios según la regla indicada y obtenemos:

$$\begin{array}{l} 4a - 3b + 5c \\ \underline{2a + 7b - 4c} \\ 6a + 4b + c \end{array}$$

- Sumar: $8x + y - z + 2u$; $-3x - 4y - 2z + 2u$; $-4u + 3z + 4x + 5y$.

  Colocando los polinomios según regla indicada obtenemos:

$$\begin{array}{l} 8x + y - z + 2u \\ -3x - 4y - 2z + 2u \\ \underline{4x + 5y + 3z - 4u} \\ 9x + 2y + 0 + 0 \end{array}$$

Respuesta: $9x + 2y$

- Sumar: $a - b$; $b - c$; $c + d$; $a - c$; $c - d$.

$$\begin{array}{l} a - b \\ \quad b - c \\ \qquad c + d \\ a \quad - c \\ \underline{\qquad c - d} \\ 2a \end{array}$$

ACTIVIDAD 1

- En los siguientes polinomios, reducir los términos semejantes.

1) $7a - 9b$, $6a - 4b$.
2) a, $b - c - b - c$, $2c - a$.
3) $5x - 11y - 9$, $20x - 1 - y$.
4) $-6m$, $8n$, $5 - m - n - 6m - 11$.
5) $-a$, b, $2b - 2c$, $3a$, $2c - 3b$.
6) $-81x$, $19y - 30z$, $6y$, $80x$, $x - 25y$.
7) $15a^2 - 6ab - 8a^2$, $20 - 5ab - 31$, $a^2 - ab$.
8) $-3a$, $4b - 6a$, $81b - 114b$, $31a - a - b$.

- Suma de polinomios.

1) $3a + 2b - c$; $2a + 3b + c$.
2) $7a - 4b + 5c$; $-7a + 4b - 6c$.
3) $m + n - p$; $-m - n + p$.
4) $9x - 3y + 5$; $-x - y + 4$; $-5x + 4y - 9$.
5) $a + b - c$; $2a + 2b - 2c$; $-3a - b + 3c$.
6) $p + q + r$; $-2p - 6q + 3r$; $p + 5q - 8r$.
7) $-7x - 4y + 6z$; $10x - 20y - 8z$; $-5x + 24y + 2z$.
8) $-2m + 3n - 6$; $3m - 8n + 8$; $-5m + n - 10$.
9) $-5a - 2b - 3c$; $7a - 3b + 5c$; $-8a + 5b - 3c$.
10) $ab + bc + cd$; $-8ab - 3bc - 3cd$; $5ab + 2bc + 2cd$.

3.2. Sustracción entre monomios y polinomios

Sustracción de monomios

Regla

Para restar dos monomios semejantes, cámbiele el signo al monomio sustraendo.

(De esta manera toda sustracción se transforma en suma). Luego sumamos atendiendo a la regla de adición de monomios semejantes.

Ejemplos

- De $9x$ restar $6x$ (sustraendo $6x$)
  Planteando la operación tenemos: $9x - (+6x) = 9x + (-6x) = 3x$.
- Restar $-9y$ de $5y$ (sustraendo – $9y$)
  $5y - (-9y) = 5y + (+9y) = 14y$.
- Réstese, $10m$ de $-4n$. (sustraendo $10m$)
  $-4n - (+10m) = -4n + (-10m) = -4n - 10m$

Sustracción de polinomios

Para restar polinomios, le cambiamos el signo a todos los términos del polinomio sustraendo. Luego realizamos la suma de dos polinomios.

Ejemplos

- De $8x + b$ restar $3x + 4$.
  (polinomio sustraendo $3x + 4$)

$$\begin{array}{l} 8a + b \\ \underline{-3a \quad\quad - 4} \\ 5a + b - 4 \end{array}$$

polinomio sustraendo con signo cambiado

- Restar: $-x^2 - x + 6$ de $-8x^2 + 5x - 4$

$$\begin{array}{l} -8x^2 + 5x - 4 \\ \underline{\quad x^2 + x - 6} \\ -7x^2 + 6x - 10 \end{array}$$

Polinomio sustraendo con signos cambiados

ACTIVIDAD 2

- Efectúe las siguientes operaciones.
  1) De $4x$ reste $-2x$
  2) De $5y$ reste $4y$
  3) De m^2 reste $2m^2$
  4) De $6x^2y$ reste $3x^2y$
  5) De $0.5z$ reste $1.8z$
  6) De $8.42t^2$ reste $-5.3t^2$

- Realice las siguientes operaciones entre polinomios.
  1) De $a + b$ restar $a - b$.
  2) De $2x - 3y$ restar $-x + 2y$.
  3) De $8a + b$ restar $-3a + 4$.
  4) De $x^2 - 3x$ restar $-5x + 6$.
  5) De $a^3 - a^2b$ restar $7a^2b + 9ab^2$.
  1) De $x - y + z$ restar $x - y + z$.
  2) De $x + y - z$ restar $-x - y + z$.

3.3. Operaciones combinadas con expresiones algebraicas

En algunas ocasiones en la escritura de expresiones algebraicas se combinan las operaciones fundamentales. Para expresar con claridad su contenido, se requiere el uso de los signos de agrupación. Por tal motivo vamos a enunciar las reglas para trabajar con los paréntesis o signos de agrupación.

- Si el paréntesis esta precedido del signo más (+), al eliminarlo todos los términos dentro de él, conservan su signo.

Ejemplo

$x^4 + (- 5x + x^2 - 8) = x^4 - 5x + x^2 - 8.$

- Si el paréntesis esta precedido del signo menos (-), al eliminarlo todos los términos dentro de él, cambian de signo.

Ejemplo

$2m - (3x - 6y^2 + 7b) = 2m - 3x + 6y^2 - 7b.$

- Cuando dentro de un signo de agrupación están incluidos otros paréntesis, la supresión de los mismos se realiza eliminándolos de adentro hacia fuera, aplicando en cada caso la regla correspondiente.

$3x^2 - \{ 3x + 2 - [3x^2 + 5x - (4x + 6) - 6x + 2]\} =$
$= 3x^2 - \{ 3x + 2 + [3x^2 + 5x - 4x - 6 - 6x + 2]\}$
$= 3x^2 - \{ 3x + 2 + [3x^2 - 5x - 4]\}$
$= 3x^2 - \{ 3x + 2 + 3x^2 - 5x -4 \}$
$= 3x^2 - \{ - 2x + 3x^2 - 2 \}$
$= 3x^2 + 2x - 3x^2 + 2$
$= 2x + 2$

ACTIVIDAD 3

Elimínese los símbolos de agrupación en los siguientes problemas y efectúe las operaciones indicadas.

1) a - (2b+c) + (a+b-c)
2) (x+2y) - (z-2x) - (y+z)
3) (h+2j-k) - (-2h+j-3k)
4) 2r - (s-3t) + (3r-2s) -t
5) a - [3b-4c- (2a-3b+4c) + 2a] - (b+c)
6) x - 2y + [3x-(2y+4x) - 3y] -3x
7) 2x - (3y+4z) -[x+2y -(z-2x+y) -z] - (x-y) +z

3.4. Multiplicación entre monomios y polinomios

La multiplicación entre expresiones algebraicas se divide en tres casos: multiplicación de monomios, multiplicación de un monomio por un polinomio y multiplicación de polinomios.

A. Multiplicación de monomios

Para multiplicar dos monomios se deben realizar los siguientes pasos:

- **Producto de los signos**.

El producto de los signos se establece mediante la siguiente regla:
El producto de cantidades con signos iguales es positivo.

(+)(+) = + ó (-)(-) = +

El producto de cantidades con signos diferentes es negativo.

(-)(+) = - ó (+)(-) = -

- **Producto de los coeficientes**

Este producto se obtiene multiplicando los coeficientes de los monomios, como si fueran números positivos.

- **Productos de las partes literales**

Para efectuar este producto, aplicamos las propiedades de las potencias.

- **Propiedades de las Potencias**
  - El producto de dos potencia de igual base es igual a la base elevada a la suma de los exponentes.
  - O sea: $a^n \times a^m = a^{n+m}$.

Ejemplos

- Multiplicar $(\frac{3}{5}x^3y^4)(-\frac{5}{6}x^2y^3)$

Solución:
- $(+)(-) = -$
- $\frac{3}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{2}$
- $(x^3y^4)(x^2y^3) = x^5y^7$
- Luego, $(\frac{3}{5}x^3y)(-\frac{5}{6}x^2y^3) = -\frac{1}{2}x^5y^7$

- Multiplicar $(-4a^3b^2)(-2a^2b^4)$

Solución:
- $(-)(-) = +$
- $(4)(2) = 8$
- $(a^3b^2)(a^2b^4) = a^5b^6$
- Luego, $(-4a^3b^2)(-2a^2b^4) = 8a^5b^6$

B. Multiplicación de un monomio por un polinomio

Para multiplicar un monomio por un polinomio, multiplique el monomio por cada uno de los términos (monomios) del polinomio.

Ejemplos

- Multiplicar $3a^2 - 4ab - 2b^2$ por $2a^2b^2$

$$2a^2b^2(3a^2 - 4ab - 2b^2) = (2a^2b^2)(3a^2) + (2a^2b^2)(-4ab) + (2a^2b^2)(-2b^2)$$
$$= 6a^4b^2 - 8a^3b^3 - 4a^2b^4$$

- Multiplicar, $-3xy^2$ por $2x^3 - 5x^2y + xy$
  Esta multiplicación también se puede efectuar colocando un factor debajo del otro.

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 5x^2y + xy \\ \underline{\quad -3xy^2 \quad} \\ -6x^4y^2 + 15x^3y^3 - 3x^2y^3 \end{array}$$

C. Multiplicación de dos polinomios

Para multiplicar dos polinomios aplique los siguientes pasos:

- Respecto a la misma variable ordene ambos polinomios en la misma forma (ascendente o descendente).
- Multiplique cada término del polinomio multiplicador por todos los términos del polinomio multiplicando.
- Coloque los productos parciales uno debajo de los otros, de modo que los términos semejantes queden en columna.
- Sume cada columna.

Ejemplo

Multiplique $x^2 + y^2 - 3xy$ por $y - x$

- Ordenaremos respecto a x en forma descendente.
  $x^2 + y^2 - 3xy = x^2 - 3xy + y^2$
  $y - x = -x + y$
- Efectuando los pasos 2, 3, 4, obtenemos

$$\begin{array}{l} \quad x^2 - 3xy + y^2 \\ \underline{\quad -x + y \qquad\qquad} \\ -x^3 + 3x^2y - xy^2 \\ \underline{\qquad\quad x^2y - 3xy^2 + y^3} \\ -x^3 + 4x^2y - 4xy^2 + y^3 \end{array}$$

Ejemplo

Multiplique $x^2 + 1 + x$ por $x^2 - x - 1$

Ordenando respecto a x en forma descendente y efectuando la multiplicación tenemos:

$$\begin{array}{r} x^2 + x + 1 \\ \underline{x^2 - x - 1} \\ x^4 + x^3 + x^2 \\ - x^3 - x^2 - x \\ \underline{- x^2 - x + 1} \\ x^4 + x^2 - 2x + 1 \end{array}$$

ACTIVIDAD 4

- Realice las siguientes multiplicaciones.

1) 2 por -3. 2) -15 por 16.
3) $2x^2$ por $-3x$.
4) -4 por -8. 5) ab por $-ab$
6) $-4a^2b$ por $-ab^2$

- Multiplicación de monomio por polinomio.

1. $3x^3 - x^2$ por $- 2x$
2. $8x^2y - 3y^2$ por $2ax^3$
3. $x^2 - 4x + 3$ por $- 2x$
4. $a^3 - 4a^2 + 6a$ por $3ab$.
5. $a^2 - 2ab + b^2$ por $-ab$.
6. $x^5 - 6x^3 - 8x$ por $3a^2x^2$.

- Multiplicación de polinomio por polinomio.

1) $a + 3$ por $a - 1$.
2) $a - 3$ por $a + 1$.
3) $x + 5$ por $x - 4$.
4) $m - 6$ por $m - 5$.
5) $-x + 3$ por $-x + 5$.
6) $-a - 2$ por $-a - 3$.
7) $x^2 + xy + y^2$ por $x - y$.
8) $a^2 + b^2 - 2ab$ por $a - b$.

3.5. División entre monomios y polinomios

En la división entre expresiones algebraicas se presentan tres casos: la división entre monomios, la división de un polinomio entre un monomio y división de un polinomio entre un polinomio. Como la división es un caso particular de la multiplicación, las leyes de los signos estudiado en la multiplicación se cumplen en esta operación.

A. División de un Monomio entre un Monomio

Al resolver esta operación, realice los siguientes pasos.

- **Determine el cociente de los signos**
  La ley de los signos en la división es igual a la ley de los signos en el producto.

- **Cociente de los coeficientes**
  Este se obtiene dividiendo el coeficiente del dividendo entre el coeficiente del divisor.

- **Cociente de la parte literal**
  Este se obtiene aplicando la ley de los exponentes que dice: La división de dos potencias de igual base, es igual a la base, elevada a la diferencia entre el exponente del dividendo y el del divisor. Simbólicamente, $\mathbf{a^m \div a^n = a^{m-n}}$.

Ejemplos

- Divida $-20x^6y^3z^5 \div 5x^4y^3z^3$
  1. Cociente de los signos: $- \div + = -$
  2. Cociente de los coeficientes:
     $20 \div 5 = 4$
  3. Cociente de la parte literal:
     $x^6y^3z^5 \div x^4y^3z^3 = x^{6-4}y^{3-3}z^{5-3}$
     $= x^2y^0z^2$ como $y^0 = 1$
     $= x^2z^2$

  Luego tenemos:
  $$-20x^6y^3z^5 \div 5x^4y^3z^3 = -4x^2z^2$$

- Divida $-5m^4n^a \div -15mn^2p$
  1. Cociente de los signos: $- \div - = +$
  2. Cociente de los coeficientes:
     $5 \div 15 = {}^5/_{15} = {}^1/_3$
  3. Cociente de la parte literal:
     $m^4n^a \div mn^2p = m^{4-1}p^{0-1}$
     $= m^3n^{a-2}p^{-1}$

  Luego tenemos:
  $-5m^4n^a \div -15mn^2p = {}^1/_5 m^3n^{a-2}p^{-1}$
  $\underline{5m^4n^ap^0}$
  0

Observación

Recuerde que en la división cada cociente encontrado, se multiplica por el divisor y se resta del dividendo.

B. División de un monomio por un polinomio

Para dividir un polinomio por un monomio, dividimos cada término, del polinomio entre el monomio.

Ejemplos

- Dividir $2a^6 - 20a^4b^3 + 32a^3b^2 \div 4a^3$
  Dividiendo cada término del polinomio entre el monomio
  $12a^6 - 20a^4b^3 + 32a^3b^3 \div 4a^3 =$
  $\frac{12a^6}{4a^3} - \frac{20a^4b^3}{4a^3} + \frac{32a^3b^2}{4a^3} = 3a^3 - 5ab^3 + 8b^2$
- Dividir $6a^8b^8 - 3a^6b^6 - a^2b^3$ entre $3a^2b3$
  Efectuando la división tenemos
  $6a^8b^8 - 3a^6b^6 - a^2b^3 \div 3a^2b^3 =$
  $\frac{6a^8b^8}{3a^2b^3} - \frac{3a^6b^6}{3a^2b^3} - \frac{a^2b^3}{3a^2b^3}$

  $= 2a^6b^5 - a^4b^3 - {}^1/_3$

C. División de polinomio entre polinomio

Para dividir un polinomio entre otro polinomio aplique el siguiente procedimiento.

- Ordene los polinomios dividendo y el divisor en forma descendente.
- Divida el primer término del dividendo entre el primer término del divisor, así obtenemos el primer cociente.
- Multiplique el cociente obtenido por el divisor. Este producto réstelo del dividendo.
- Si hay residuo, considérelo como nuevo dividendo y repita los pasos 2 y 3.
- La división termina cuando el residuo sea cero, o cuando el grado del polinomio monomio sea menor que el grado del polinomio divisor.
- Si el residuo es cero, el resultado es el cociente obtenido. En caso contrario, el resultado es igual al cociente encontrado, más la fracción cuyo numerador es el residuo y denominador el polinomio divisor.

Ejemplo

- Dividir $x^2 - 20 + x$ entre $x - 4$.
  Ordenando, dividendo y divisor en forma descendente con relación x, tenemos:

$$
\begin{array}{lll}
x^2 + x - 20 \;\div & x + 5 \;= & x - 4 \\
\underline{-x^2 - 5x} & (2) & (1)\ (4) \\
\quad -4x - 20 & (3) & \\
\quad \underline{+4x + 20} & (5) & \\
\qquad 0 \quad 0 & &
\end{array}
$$

Respuesta: x - 4.

Descripción de los valores señalados por los números encerrados en los paréntesis.

(1) El valor x, es el cociente obtenido al dividir el primer término del dividendo

entre el primer término del divisor.

(2) Esta expresión es el producto del primer cociente por el divisor con sus signos cambiados, para transformar la resta en una suma.

(3) Esta expresión es el primer residuo de la división. Según el procedimiento descrito, será utilizado como nuevo dividendo.

(4) Esta cantidad es el nuevo cociente encontrado al continuar con el proceso de la división.

(5) Este binomio es el producto del último cociente parcial por el divisor, con sus respectivos signos cambiados para transformar la resta en una suma.

Ejemplos

- Dividir $x^5 - 5x + 12x^2$ entre $- 2x + x^2 + 5$.

$$
\begin{array}{l}
x^5 \qquad\quad + 12x^2 - 5x \div x^2 - 2x + 5 = x^3 + 2x^2 - x \\
\underline{- x^5 + 2x^4 - 5x^3\qquad} \\
\ \ 0 + 2x^4 - 5x^3 + 12x^2 - 5x \\
\qquad \underline{- 2x^4 + 4x^3 - 10x^2\ \ } \\
\qquad\quad 0 - x^3 + 2x^2 - 5x \\
\qquad\qquad \underline{+ x^3 - 2x^2 + 5x} \\
\qquad\qquad\qquad 0 + 0 + 0
\end{array}
$$

Respuesta: $x^3 + 2x^2 - x$.

Cuando en el dividendo faltan algunas potencias, al ordenarlo para dividir, deje los espacios correspondientes a los términos faltantes.

- Divida $5x - 10 + 6x^2$ entre $3x - 2$.

$$
\begin{array}{l}
\ \ 6x^2 + 5x - 10 \div 3x - 2 = 2x - 3. \\
\underline{- 6x^2 + 4x\quad} \\
\qquad 0 + 9x - 10 \\
\qquad\quad \underline{- 9x + 6} \\
\qquad\qquad 0 - 4
\end{array}
$$

Respuesta: $2x - 3 - \dfrac{4}{3x - 21}$

ACTIVIDAD 5

- División entre monomios.
  1) $-5a^2$ entre $- a$
  2) $14a^3b^4$ entre $-2ab^2$
  3) $-a^3b^4c$ entre a^3b^4.
  4) $-a^2b$ entre $-ab$
  5) $54x^2y^2z^3$ entre $-6xy^2z^3$.
  6) $-5m^2n$ entre m^2n.
  7) $-8a^2x^3$ entre $-8a^2x^3$.
  8) $-xy^2$ entre $2y$.

- División de polinomio entre monomio.
  1) $a^2 - ab$ entre a.
  2) $3x^2y^3 - 5a^2x^4$ entre $-3x^2$.
  3) $3a^3 - 5ab^2 - 6a^2b^3$ entre $-2a$.
  4) $x^3 - 4x^2 + x$ entre x.
  5) $4x^8 - 10x^6 - 5x^4$ entre $2x^3$.
  6) $6m^3 - 8m^2n + 20mn^2$ entre $-2m$.

- División de polinomio entre polinomio
  1) $a^2 + 2a - 3$ entre $a + 3$.
  2) $a^2 - 2a - 3$ entre $a + 1$.
  3) $x^2 - 20 + x$ entre $x + 5$.
  4) $m^2 - 11m + 30$ entre $m - 6$.
  5) $x^2 + 15 - 8x$ entre $3 - x$.
  6) $6 + a^2 + 5a$ entre $a + 2$.
  7) $6x^2 - xy - 2y^2$ entre $y + 2x$.
  8) $-15x^2 - 8y^2 + 22xy$ entre $2y - 3x$.

UNIDAD 4.
PRODUCTOS NOTABLES

Llamaremos productos notables a multiplicaciones especiales, cuyos resultados se obtienen aplicando ciertas reglas. A continuación enunciaremos los productos notables más comunes y respectiva regla.

4.1. El producto de un número por la suma o diferencia de dos o más números:

$a(b \pm c \pm d...) = ab \pm ac \pm d....$

El producto de una cantidad por la suma o diferencia de dos o más cantidades es igual a la suma o diferencia de los productos de la primera cantidad por cada una de las cantidades de la segunda expresión.

Ejemplos

- $5x(2y - 5) = (5x)(2y) - (5x)(5) =$ $10xy + 25x$

- $2x^2y(3x + 2y - 5xy) =$ $(2x^2y)(3x) + (2x^2y)(2y) - (2x^2y)(5xy)=$ $6x^3y + 4x^2y^2 - 10x^3y^2$

4.2. El producto de la suma por diferencia de dos números

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

La suma por la diferencia de dos cantidades es igual al cuadrado de la cantidad positiva en ambos binomios, menos el cuadrado de la cantidad negativa.

Ejemplos

- $(4a + 3b)(4a - 3b) = (4a)^2 - (3b)^2 = 16a^2 - 9b^2$
- $(-5x^2 + 2y)(5x^2 + 2y) = (2y)^2 - (5x^2)^2 = 4y^2 - 25x^4$
- $({}^1/_2x^n - {}^1/_3y)({}^1/_2x^n + {}^1/_3y) = ({}^1/_2x^n)^2 - ({}^1/_3y)^2 = {}^1/_4x^{2n} - {}^1/_9y^2$

4.3. El cuadrado de la suma o diferencia de dos números

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

El cuadrado de la suma de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad, más o menos, el doble producto de la primera cantidad por la segunda, más el cuadrado de la segunda cantidad.

Ejemplos

- $(3x + 5y)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(5y) + (5y)^2 = 9x^2 + 30xy + 25y^2$
- $({}^1/_3x^2 + {}^1/_2y^3)^2 =({}^1/_3x^2)^2 + 2({}^1/_3x^2)({}^1/_2y^3) + ({}^1/_2y^3)^2 = {}^1/_9x^4 + {}^1/_3x^2y^2 + {}^1/_4y^6$
- $(5a - 7b)^2 = (5a)^2 - 2(5a)(7b) + (7b)^2 = 25a^2 - 70ab + 49b^2$
- $(3x^2 - 5y^3)^2 = (3x^2)^2 - 2(3x^2)(5y^3) + (5y^3)^2 = 9x^4 - 30x^2y^3 + 25y^6$

4.4. El cubo de la suma o diferencia de dos números

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^3 \pm b^3$

El cubo de la suma de dos cantidades es igual a, el cubo del primer término, mas (o menos) tres veces el producto del cuadrado del primer término por el segundo, mas tres veces el producto del primer término por el cuadrado del segundo, mas (o menos) el cubo del segundo término.

Ejemplos

- $(2x + 1)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2(1) + 3(2x)(1)^2 + (1)^3 = 8x^3 + 12x + 6x + 1$
- $(3x + 5)^3 = (3x)^3 + 3(3x^2(5) + 3(3x)(5)^2 + (5)^3 = 27x^3 + 135x^2 + 225x + 125$
- $(3x^2 - 2y)^3 = (3x^2)^3 - 3(3x^2)^2(2y) + 3(3x^2)(2y)^2 - (2y)^3 = 27x^6 - 54x^4y + 36x^2y^2 - 8y^3$
- $(2y^2 - 5x^2)^3 = (2y^2)^3 - 3(2y^2)^2(5x^2) + 3(2y^2)(5x^2)^2 - (5x^2)^3 = 8y^6 - 60y^4x^2 + 150y^2x^4 - 125x^6$

4.5. El producto de dos binomios de la forma $(ax + b)(cx + d)$

$(ax + b)(cx + d) = ac\,x^2 + (bc + bd)\,x + bd$

La regla de este producto es difícil de recordar, por lo tanto aplicaremos el esquema anterior. Según él, las cantidades unidas por las líneas se multiplican y los dos productos obtenidos en la parte superior forman el primer y tercer término de la respuesta. Luego, el segundo término de la respuesta se obtiene al sumar los productos obtenidos en la parte inferior.

Ejemplos

- $(2x - 5)(2x + 3) = (2x)(2x) + [(2x)(3) + (2x)(-5)] + (-5)(3) = 4x^2 - 4x - 15$
- $(x - 6)(x - 5) = (x)(x) + [(1)(-5) + (1)(-6) + (-6)(-5) = x^2 - 11x + 30$
- $(3x - 7)(4x + 2) = (3)(4)x^2 + [(3)(2) + (-7)(2)]x + (-7)(2) = 12x^2 - 8x - 14$

Actividad 1

1) $(a^2 + x^2)(x^2 - a^2)$
2) $(2a - 1)(1 + 2a)$.
3) $(2m + 9)(2m - 9)$
4) $(6m^2 - mx^2)(6m^2 + mx^2)$
5) $(1 - 8xy)(8xy + 1)$
6) $(a^{x+1} - 2b)(2b + a^{x+1})$
7) $(0.3y - 1/5)(0.3y + 1/5)$
8) $(3x^a - 5y^m)(5y^m + 3x^a)$
9) $(2x - 7)(7 + 2x)$
10) $(4y - 5)(5 + 4y)$
10) $(2xy - 3)^2$
11) $(5y + 2)^2$
11) $(2x + 3y)^2$
12) $(1 + 3x^2)^2$
13) $(4m^5 + 6n^4)^2$
14) $(0.5x^3 - 2/5)^2$
15) $(4ab^2 + 5xy)^2$
16) $(0.4\,y^3 - 4/5)^2$
17) $(a^2x - by)^2$
18) $(0.4y - 0.3x)^2$
19) $(a^m - b^n)^2$
20) $(0.6y + 0.5)^2$
21) $(x^{a+1} + y^{x-2})^2$
22) $(0.6y^4 - 0.3)^2$
23) $(2a - 3b)^2$
24) $(0.75x^3 - 1/7)^2$
25) $(x^5 - 3ay^2)^2$
26) $(x^m - y^2)^2$
27) $(x + 4)(x - 4)$
28) $(x + 7)(x - 3)$
29) $(2x + 3)(x - 5)$
30) $(x^3 + 7)(x^3 - 5)$
31) $(n^2 - 1)(n^2 - 20)$
32) $(a + 2)^3$
33) $(a^2 - 2b)^3$
34) $(1 - 3y^2)^3$
35) $(0.3x - 0.1y)^3$
36) $(0.2x^3 - 0.3)^3$
37) $(3x + 5)(2x - 4)$
38) $(x^2 - 3)(3 + x^2)$
39) $(5x - 2)(2 - 3x)$
40) $(\underline{1}x + {}^{1}/_{3})({}^{9}/_{2}\,x - 4)$
41) $(0.4x + 1/3)(10x + 4)$
42) $(x^2 - 4)^3$
43) $(m + 3)^3$
44) $(2x + 3y)^3$
45) $(0.5y - 1/3)^3$
46) $(0.2x^4 - 0.3)^3$

UNIDAD 5. FACTORIZACIÓN

Factorizar una expresión algebraica significa escribirla como un producto de dos o más factores. Por ejemplo, la expresión $(3x+1)(x-3)$ está factorizada, ya que esta expresada como un producto de dos cantidades: $(3x+1)$ y $(x-3)$. Pero, la expresión $(x-1)(y+1)+(x-3)$ no esta factorizada; aunque aparece un producto, la expresión se encuentra escrita como suma. Al factorizar una expresión, siempre deshacemos el proceso de una multiplicación. En este caso un producto notable.

5.1. Factor común de varios monomios

Se llama factor común de varios monomios al máximo común divisor de los monomios. O sea, el mayor término que divide a todos y cada uno de los términos de la expresión

Ejemplos

1. El factor común de los monomios: $10x^2y$, $5xy^3$, $45x^3y^3z$, es el término $5xy$.
2. En los monomios: $12a^2b^6c$, $72a^3b^4c^2$, $96a^4b^3c^5$, el monomio común es $12a^2b^3c$.

5.2. Factor monomio de un polinomio (Método práctico)

- Busque el número mayor que divida expresiones a los coeficientes.
- Busque el factor común de la parte literal.
- La factorización es igual al producto del factor común por los cocientes obtenidos al dividir cada término entre el factor común.

$$ax + ay + az = a(x + y + z)$$

Ejemplos

Factorizar las siguientes expresiones:

1. $10b - 20ab^2 = 10b(1 - 2ab)$.
2. $10a^2 - 5a + 25a^3 = 5a(2a - 1 + 5a^2)$
3. $18mxy^2 - 54m^2x^2y^2 + 72my^2 = 18my^2(x - 3mx^2 + 4)$

5.3. Factor polinomio de un polinomio

El factor común polinomio de varios multinomios, es el mayor polinomio que divida exactamente a los multinomios. La factorización de varios multinomios por un polinomio es igual al producto del polinomio común por los cocientes de dividir cada multinomio entre el polinomio común.

Ejemplos

Factorice los siguientes polinomios:

- $2x(x - y) - 3(x - y)$.

En los polinomios anteriores, el factor común es $(x - y)$. Dividiendo $2x(x - y)$ entre $(x - y)$ obtenemos como resultado a $2x$. Así mismo, a división de $3(x - y)$ entre $(x - y)$ es igual a 3. Por lo tanto la factorización anterior es:
$2x(x - y) - 3(x - y) = (x - y)(2x - 3)$

- Factorice $3y(2x - 1) - 5(2x - 1) + x(2x - 1) = (2x - 1)(3y - 5 + x)$

- Factorice $y(x - 2) - 3(-x + 2)$.

Como los términos dentro de los paréntesis difieren solamente en los signos, éstos se cambian multiplicando las cantidades que hay dentro de una expresión por (-1) y anteponiéndole a dicho paréntesis un signo menos. Luego factorice según el caso indicado.

$$
\begin{aligned}
Y(x - 2) - 3(-x + 2) &= y(x - 2) - [-3(x - 2)] \\
&= y(x - 2) + 3(x - 2) \\
&= (x - 2)(y + 3)
\end{aligned}
$$

1. Factor común por agrupación de términos

En algunos casos en que no hay factor común para todos los términos de un polinomio, pero si para algunos de ellos, éstos se asocian de manera que dichos agrupamientos tengan un factor común. Luego factorizamos según la regla del factor común monomio y la de factor común polinomio, si es posible.

Factorizar: $3m^2 - 6mn + 4m - 8n$
Asociando tenemos : $(3m^2 - 6mn) + (4m-8n)$
Factorizando cada grupo obtenemos: $3m(m - 2n) + 4(m - 2n)$
Factorizando de nuevo por $(m - 2n)$ tenemos: $(m - 2n)(3m + 4)$
$3m^2 - 6mn + 4m - 8n = (m - 2n)(3m + 4)$.

Ejemplo

Factorizar: $2x^2 - 3xy - 4x + 6y$
Asociando tenemos:
$(2x^2 - 3xy) + (-4x + 6y)$.
Factorizando cada grupo tememos: $x(2x - 3y) + 2(-2x + 3y)$.

Observe que, los términos dentro del expresión, sólo difieren en los signos. Para lograr que tengan signos iguales multiplicamos un término por (-1). Por ejemplo $2(-2x+3y) = -2(2x-3y)$, luego tenemos: $x(2x - 3y) - 2(2x - 3y)$, expresión factorizable por $(2x - 3y)$. Por lo tanto, factorizando tendremos:

$$x(2x - 3y) - 2(2x - 3y) = (2x - 3y)(x - 2).$$

5.5. Diferencia de dos cuadrados

La diferencia de dos cuadrados se obtiene al multiplicar la suma por la diferencia de sus respectivas raíces cuadradas.

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = (a + b)(a - b)$ donde **a** y **b** son las respectivas raíces cuadradas de a^2 y b^2.

Ejemplos

- $16x^2 - 25y^4 = (4x + 5y^2)(4x - 5y^2)$
  $4x$, $5y^2$, raíces cuadradas de $16x^2$ y $25y^4$, respectivamente.
- ${}^{1}/_{4}a^2 - {}^{1}/_{9}b^2 = ({}^{1}/_{2}a - {}^{1}/_{3}b)({}^{1}/_{2}a + {}^{1}/_{3}b)$
  ${}^{1}/_{4}a$, $1/_{3}b$; raíces cuadradas.
- $a^{2n} - 9b^{4m} = (a^n - 3b^{2m})(a^n + 3b^{2m})$
  a^n , $3b^{2m}$; raíces cuadradas
- $4x^2 - (x+y)^2 = [2x+(x+y)][2x-(x+y)]$. $4x$, $(x+y)$ son las raíces de los cuadrados
  $= [2x + x + y][2x - x - y]$
  $= (3x + y)(x - y)$

5.6. Factores de una expresión que es un trinomio cuadrado perfecto

Volviendo a los productos notables, le recordamos que un trinomio cuadrado perfecto es el desarrollo del cuadrado de un binomio. Así que, escribiendo sus fórmulas, pero en sentido contrario tenemos:

$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$ (1)
$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$ (2)

Para factorizar un trinomio cuadrado perfecto, debemos verificar si cumple con las condiciones de las expresiones 1 ó 2.

Ejemplos

· Factorizar: $x^2 + 10x + 25$
Observe que, x^2 y 25 son los cuadrados de x y 5. Además puede comprobar que el doble producto de x y 5 es 10x. Como la expresión corresponde al desarrollo del cuadrado del binomio (x + 5), (caso 1), su factorización es:

$$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$$

· Factorizar: $-20xy + 4x^2 + 25y^2$
Observando el ejemplo podemos verificar que $4x^2$ y $25y^2$ son los cuadrados de 2x y 5y; además, -20xy es el doble producto de 2x y 5y. Por lo tanto, el ejemplo en mención, corresponde al desarrollo del cuadrado de la diferencia de 2x y 5y. (caso 2).

Luego su factorización es:
$4x^2 - 20xy + 25y^2 = (2x - 5y)^2$.

- Factorizar: $x^2 + {}^1/_4b^2 + bx$

Cuadrados perfectos: x^2, ${}^1/_4b^2$
Raíces cuadradas: x , ${}^1/_2b$
Doble producto: $2(x)({}^1/_2b) = 2bx$
Luego, el ejemplo se factoriza según caso (2).

$$X^2 - bx + {}^1/_4b^2 = (x - {}^1/_2b)^2$$

- Factorizar: $a^2 - 2^a(a - b) + (a - b)^2$

Cuadrados perfectos: a^2 , $(a - b)^2$
Raíces cuadradas: a, (a - b)
Doble producto: 2a(a - b). Luego, el ejemplo se factoriza según (1).

$$\begin{aligned} a^2 + 2a(a-b) + (a-b)^2 &= [a + (a-b)]^2 \\ &= [a + a - b]^2 \\ &= (2^a - b)^2 \end{aligned}$$

5.7. Factores de una expresión que es un cubo perfecto de binomios

Por los productos notables sabemos que, un cubo perfecto corresponde al desarrollo del cubo de la suma o diferencia de dos cantidades. Por lo tanto su factorización corresponde a una de las siguientes expresiones:

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$
(1)
$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$
(2)

Para que una expresión se factorice como cubo perfecto debe cumplir con las condiciones de las expresiones 1 y 2.

Ejemplo

- Factorizar: $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$ Según la regla del cubo de un binomio, el resultado debe tener dos cubos perfectos. Si sus respectivas raíces fueran a y b, los dos términos restantes son igual a: $3a^2b$ y $3ab^2$.

En el ejemplo encontramos los cubos $8x^3$ y 1, tienen respectivas raíces cúbicas; 2x y 1. También podemos verificar que $12x^2$ y 6x corresponden a los resultados de las expresiones $3(2x)^2(1)$ y $3(2x)(1)^2$. Por lo tanto el ejemplo es un cubo perfecto, y corresponde al caso (1). O sea:

$8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = (2x + 1)^3$

- Factorizar: $8x^6 - 36x^4y^3 + 54x^2y^2 - 27y^9$.

Cubos perfectos: $8x^6$ y $- 27y^9$
Raíces cúbicas: $2x^2$ y $- 3y^3$
Triples productos: $3(2x^2)^2(-3y^3) = -36x^4y^3$
$3(2x^2)(-3y^3)^2 = 54x^2y^3$
El ejemplo es un cubo perfecto y corresponde al caso dos.
$8x^6 - 36x^4y^3 + 54x^2y^2 - 27y^9 = (3x^2 - 3y^3)^3$.

5.8. Factores de un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

Si el trinomio puede escribirse de alguna de las siguientes formas:

$x^2 + (a + b)x + (a)(b)$ (1)
$x^2 + (a - b)x + (a)(-b)$ (2)
$x^2 + (-a + b)x + (-a)(b)$ (3)
$x^2 + (-a - b)x + (-a)(-b)$ (4)

Se factorizan así:

(1) $(x + a)(x + b)$
(2) $(x + a)(x - b)$
(3) $(x - a)(x + b)$
(4) $(x - a)(x - b)$

Ejemplos

(1) Factorizar: $x^2 + 5x + 6$ como el ejemplo se puede escribir de la forma (1),
$x^2 + (3 + 2)x +(3)(2)$, entonces:
$x^2 + 5x + 6 = x^2 + (3 + 2)x + (3)(2)$
$= (x + 3)(x + 2)$

(2) $x^2 + x - 12 = x^2 + (4 - 3)x + (4)(-3)$ Forma (2)
$= (x + 4)(x - 3)$

(3) $x^2 - 5x - 6 = x^2 + (-6 + 1)x + (-6)(1)$ Forma (3)
$= (x - 6)(x + 1)$

5.9. Factores de un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

Un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, si es factorizable, siempre podrá expresarse como una de las formas anteriores. Para ello hacemos la siguiente transformación:

$$ax^2 + bx + c = \frac{(ax)^2 + b(ax) + ac}{a}$$

Observe que en esta transformación, multiplicamos toda la expresión por el coeficiente de x^2, y luego dividimos por la misma cantidad.

Así; la expresión $(ax)^2 + b(ax) + ac$, corresponde a uno de los casos anteriores, por tanto puede ser factorizada de acuerdo a alguna de las reglas descritas. Con anterioridad. Generalmente, uno o los dos factores obtenidos son factorizables, obteniéndose así, las cantidades que permiten simplificar la expresión.

Ejemplo

- Factorizar: $6x^2 - 7x - 3$

  Transformando la expresión tenemos:

$$ax^2 + bx + c = \frac{(ax)^2 + b(ax) + ac}{a}$$

$$6x^2 - 7x - 3 = \frac{(6x)^2 - 7(6x) + (3)(6)}{6}$$

multiplicando por 6 y dividiendo a la vez por 6

$$6x^2 - 7x - 3 = \frac{(6x)^2 + (-9 + 2)(6x) + (-9)(2)}{6}$$

aplicando caso 3

$$6x^2 - 7x - 3 = \frac{(6x-9)(6x+2)}{6}$$

factorizamos según caso 3

$$6x^2 - 7x - 3 = \frac{3(2x-3)2(2x+1)}{6}$$

aplicamos factor común monomio

$$6x^2 - 7x - 3 = (2x-3)(2x+1)$$

simplificamos 3 y 2 con 6

- **Factores de la suma de dos cubos perfectos**

La suma de dos cubos se factoriza mediante la expresión: $a^3 \pm b^3 = (a+b)(a^2 \mp b^2)$

Observe que la suma de dos cubos se descompone en el producto de dos factores, los cuales se describen así:

- El primer factor esta formado por la suma de las raíces cúbicas de los cubos perfectos.
- El segundo factor es igual a, el cuadrado de la primera raíz cúbica, menos el producto de las dos raíces, más el cuadrado de la segunda raíz.

Ejemplos

- Factorice: $8x^2 + 125y^3$

Raíces cúbicas: 2x, 3y. Luego:
$8x^3 + 125y^3 = (2x + 3y)[(2x)^2 - (2x)(3y) + (3y)^2] = (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$

- Factorice: $27y^6 + 64$

Raíces cúbicas: $3y^2$, 4. Luego tenemos que:
$27y^6 + 64 = (3y^2 + 4)[(3y^2)^2 - (3y^2)(4) + (4)^2] = (3y^2 + 4)(9y^4 - 12y^2 + 16)$.

5.11. Factores de la diferencia de dos cubos perfectos

La diferencia de dos cubos se factoriza según la siguiente expresión:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Ejemplos

- Factorice: $8x^3 - 1$

Raíces cúbicas; 2x y 1.
$8x^3 - 1 = (2x-1)[(2x)^2 + (2x)(1) + (1)^2] = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$

- Factorice: $\frac{1}{27}y^6 - 8$

Raíces cúbicas; $\frac{1}{3}$ y 2.
$\frac{1}{27}y^6 - 8 = (\frac{1}{3}y^2 - 2)[(\frac{1}{3}y)^2 + (\frac{1}{3}y^2)(2) + (2)^2] = (\frac{1}{3}y^2 - 2)(\frac{1}{9}y^4 + \frac{2}{3}y^2 + 4)$.

ACTIVIDAD

Resuelve los siguientes problemas:

1) $5a^2 + a$
2) $1 -(a-3b)^2$
3) $9x^2 - 6xy + y^2$
4) $343 + 8a^3$
5) $1 - x^3$
6) $6am - 4an - 2n + 3m$
7) $2xy - 6y + x2 - 32$
8) $n^2 + n - 42$
9) $x^8 - 6x^4 y^4 + y^8$
10) $(m+n)^2 - 6(m+n) + 9$
11) $8m^3 - 27y^6$
12) $81x^4 + 25y^2 - 90x^2y$
13) $1 - m^2$
14) $6m^4 + 7m^2 - 20$
15) $a^2 + 2ab + b^2 - m^2$
16) $(a+m)^2 - (b+n)^2$
17) $6x^2 + 19x - 20$
18) $6am - 3m - 2a + 1$

19) $1 - a^2 b^4$
20) $2am - 3b - c - cm$
21) $1 - {}^4/_9\, a^8$
22) $x^2 - 36$
23) $m^2 + 2mx + x^2$
24) $6x^2 - x - 2$
25) $x^2 - 3x - 4$
26) $a^3 -3ab + 5ab^2$
27) $27a^3 - 1$
28) $4x^4 + 3x^2y^2 + y^4$
29) $1 - 4b + 4b^2$
30) $15m^2 + 1m - 14$
31) $a^2 - a - 30$
32) $8a^3 - 12a^2 + 6a - 1$
33) $16a^2 - 24ab + ab^2$
34) $125a^6 + 1$
35) $x^4 + 4x^2 - 21$
36) $x^5 - x^4 + x - 1$
37) $9a^2b + 16a^3b - 24a^2b^2$
38) $-17x^2 - 4$
39) $25x^4 - 81y^2$
40) $b^2 + 12ab + 36a^2$
41) $x^2 - a^2 + 2xy + y^2 + 2ab -b^2$
42) $x^4 + x^2 + 25$
43) $a^8 - 28a^4 + 36$
44) $16 - (2a+b)^2$
45) $125a^2bx - 15a^2by$
46) $x^3 - 64x^4$
47) $81a^6 - 4b^2c^8$
48) $(x+1)^2 - 81$
49) $49a^2b^2 - 14ab + 1$
50) $9a^3 + 63a - 45a^2$
51) $2ax^2 + 6bx^3 - cx^2$
52) $ax + 3x + 2ay + 6y$
53) $(a - c)x - (a - c)y$
54) $12b^2 + 3y - b^2z^3 - yz^3$
55) $c^2 - 8cd + 15d^2$
56) $x^2 - 16xy + 63y^2$
57) $9y^2 - 60y + 100$
58) $36x^2 + 48yz + 16z^2$
59) $2bx + 15n - 5b - 6nx$
60) $x^2 -5mx + 6m^2$
61) $4x -bx - 24y + 6by$
62) $x^2 - 10x + 21$
63) $3x^2 -5x - 2$
64) $2x^2 + 3x - 2$
65) $20x^2 + ax - a^2$
66) $5y^2 - 5y - 6$

UNIDAD 6. ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

1. Generalidades y definición

Ecuación

Se denomina *ecuación*, a la igualdad que contiene una o varias letras, bajo los cuales se sobrentienden los valores desconocidos o incógnitos.

Ejemplo

La igualdad $4x - 5 = 2x + 3$ es una ecuación con una incógnita; ella se satisface para el valor $x = 4$.

Soluciones de una ecuación

El valor que satisface la ecuación recibe el nombre de *raíz o solución*.

Coeficiente de la ecuación

Los factores numéricos o literales que acompañan las incógnitas, así como el término independiente, es decir, el término que no contiene incógnitas se les llama coeficiente de la ecuación.

Ejemplos

- En la ecuación $3x - 2y + 5 = 0$, los coeficientes son: 3, -2 y 5.

- En la ecuación $ax + {}^{1}/_{2}y - 4 = 0$ los coeficientes son: a, ${}^{1}/_{2}$ y -4.

Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Toda expresión reducible a una ecuación de la forma *ax + b = 0* se denomina ecuación de primer grado en una variable.

Ejemplos

• $5x - 3 = 0$	• $ax + b = 0$
• $7x = -{}^{1}/_{2}$	• $3x - 5 = 6x - 8$

2. Partes de una ecuación

A toda ecuación, el signo de igualdad la divide en dos partes denominadas: miembro izquierdo y miembro derecho.

Ejemplo

En la ecuación $4x - 7 = x - 4$, el miembro izquierdo es $4x - 7$ y el miembro derecho es $x - 4$.

3. Propiedades utilizadas al resolver una ecuación lineal

Dos importes propiedades de la igualdad nos permiten resolver las ecuaciones lineales en una variable. Ellas son:

- Si a ambos miembros de una ecuación sumamos o restamos un mismo número, la nueva ecuación es equivalente a la inicial.

Sean a, b, c∈R , si a = b entonces a + c = b + c.

- Si ambos miembros de una ecuación se multiplican o dividen por un mismo número, distinto de cero, la nueva ecuación es equivalente a la inicial. En símbolos podemos expresarla de la siguiente forma:

Sean a, b, c∈R, c ≠ 0. Si a = b entonces ac = bc o $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$

- **Método práctico**
  Cualquier término de una ecuación se puede pasar de un miembro a otro. Al transponerlo ejecutará en el otro miembro, la operación contraria a la que realiza.

Ejemplo

$3x + 5 = -6 \Rightarrow 3x = -6 - 5$ (sumaba, pasó restando)

$\Rightarrow 3x = -11$ (resultado de reducir)

$\Rightarrow x = -11/3$ (multiplicaba, pasó diviendo)

4. Resolución de ecuaciones

Al resolver una ecuación debemos realizar una serie de transformaciones, hasta tanto se hayan obtenido sus raíces o soluciones. O lo que es equivalente a reducir la ecuación a la forma $x = a$.

Procedimiento para resolver ecuaciones lineales

- Transponer términos independientes para reunirlos en un solo miembro y reducirlos.
- Transponer términos que contengan la variable para reunirlos en un solo miembro y reducirlos.
- Si el coeficiente de la variable es distinto de uno , transponer el

coeficiente para reducir la ecuación a la forma $x = a$.

- Comprobar la solución de la ecuación general.

Ejemplos

Hallar el valor de x en las siguientes ecuaciones:

- $16 + 7x - 5 + x = 11x - 3 - x$

$11 + 8x = 10x - 3$ sumando

$8x = 10x - 3 - 11$ el 11 sumaba pasa restando (método práctico)

$8x - 10x = -11 - 3$ el 10x sumaba pasa restando (método práctico)

$-2x = -14$ sumando

$x = \frac{-14}{-2}$ el –2 multiplicaba, pasa dividiendo (método práctico)

$x = 7$ dividiendo

Comprobación de la solución en la ecuación Remplazaremos el valor $x = 7$ en la ecuación general.

$$16 + 7x - 5 + x = 11x - 3 - x$$
$$16 + 7(7) - 5 + 7 = 11(7) - 3 - 7$$
$$16 + 49 - 5 + 7 = 77 - 3 - 7$$
$$67 = 67$$

- $15x - 10 = 6x - (x + 2) + (-x + 3)$

$15x - 10 = 6x - x - 2 - x + 3$ eliminando paréntesis

$15x - 10 = 4x + 1$ sumando (método práctico)

$15x - 4x = 1 + 10$ transponiendo términos (método práctico)

$11x = 11$ sumando

$x = \frac{11}{11}$ (método práctico)

$x = 1$ dividiendo

- $9x - (5x + 1) - \{2 + 8x - (7x - 5)\} + 9x = 0$

$$9x - 5x - 1 - \{2 + 8x - 7x + 5\} + 9x = 0$$
$$13x - 1 - \{7 + x\} = 0$$
$$13x - 1 - 7 - x = 0$$
$$12x - 8 = 0$$
$$12x = 8$$
$$x = \frac{8}{12}$$
$$x = \frac{2}{3}$$

- $\frac{x}{5} + 5 = \frac{1}{3} - x$

Para resolver las ecuaciones fraccionarias, las transformamos en enteras, multiplicando todos sus términos por el máximo común denominador (m.c.d). Por ejemplo:

$$\frac{x}{5}(6) + 5(6) = \frac{1}{3}(6) - x(6)$$

$$x + 30 = 2 - 6x$$
$$x + 6x = 2 - 30$$
$$7x = -28$$
$$x = -4$$

6.5. Problemas de Aplicación

Un problema de aplicación describe hechos reales entre cantidades conocidas y desconocidas, y las relacionadas entre ellas. Tales problemas representan el puente entre la teoría algebraica y la aplicación de dicha teoría a situaciones de la vida real. Nuestro trabajo consiste en transformar esos problemas en expresiones, llamadas ecuaciones, que nos permitan encontrar su solución.

Cada problema es una situación diferente, por lo tanto no es posible dar un patrón que nos permita resolverlos a todos. Sin embargo, las siguientes sugerencias pueden ayudarlo:

- Leer el problema con mucha atención (varias veces si es posible).
- Escribir hechos importantes y sus relaciones.
- Identificar las cantidades desconocidas en término de una variable.
- Escribir una ecuación que relacione las cantidades desconocidas y los hechos descritos en el problema.
- Resolver la ecuación resultante.
- Responder a todas las preguntas del problema.
- Verificar la solución o soluciones en el problema original.

Ejemplo

En un grupo de 35 estudiantes había 10 varones menos que el doble de niñas. Determine cuántos había de cada sexo.

Solución

Determinaremos cuántos varones y cuántas niñas había en el grupo. Aquí tenemos dos valores desconocidos, pero solamente podemos usar una variable. Por lo tanto designemos con x = *número de varones.* Como el grupo tiene 35 estudiantes, entonces el total de alumnos menos la cantidad de varones es igual al número de niñas. Luego, *$35 - x$ = número de niñas*.

Por otro lado, el problema nos dice que hay 10 varones menos que el doble de niñas.

Esta afirmación se plantea en la ecuación:

Número de varones es igual al doble número de niñas menos diez varones. O sea:

$$x = 2(35 - x) - 10$$
$$x = 70 - 2x - 10$$
$$x + 2x = 60$$
$$3x = 60$$
$$x = 20$$

Número de varones: = 20
Número de niñas: = $(35 - x) = (35 - 20) = 15$
Verificación

Número de varones: = doble de niñas menos 10

$$20 = 2(15) - 10$$
$$20 = 30 - 10$$
$$20 = 20$$

Ejemplo

Julia, Sofía y Marta trabajaron en total 18 horas en una fiesta escolar. Julia y Sofía completaron 11 horas entre ambas y Marta trabajo una hora mas que Julia. Determine cuántas horas trabajó cada una.

Solución

Julia y Sofía trabajaron 11 horas entre ambas.
Sea x = *número de horas trabajadas por Julia.*
Entonces *$11 - x$ = número de horas trabajadas por Sofía*.
Como Marta trabajo 1 hora más que Julia, resulta que,
$x + 1$ = número de horas trabajadas por Marta.

El total de horas trabajadas por las tres suma 18 horas. Este hecho se plantea en la ecuación:

$$\begin{aligned} x + (11 - x) + (x + 1) &= 18 \\ x + 11 - x + x + 1 &= 18 \\ x + 12 &= 18 \\ x &= 18 - 12 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Número de horas trabajadas por Julia: $x = 6$
Número de horas trabajadas por Sofía: $11 - x = 11 - 6 = 5$
Número de horas trabajadas por Marta: $x + 1 = 6 + 1 = 7$

Ejemplo

Juan tiene 12 monedas mas que Enrique y entre ambos tienen 78. Determínese cuántas monedas tiene cada uno.

Solución

Sea: x = *número de monedas que tiene Juan.*
Entonces $x - 12$ = *número de monedas que tiene Enrique.*
Juan y Enrique tienen 78 monedas. Esta afirmación se escribe con la ecuación:
Monedas de Juan + Monedas de Enrique = 78 monedas

$$\begin{aligned} x + (x - 12) &= 78 \\ x + x - 12 &= 78 \\ 2x &= 78 + 12 \\ 2x &= 90 \\ x &= 45 \end{aligned}$$

Monedas que tiene Juan: $x = 45$
Monedas que tiene Enrique: $x - 12 = 45 – 12 = 33$

ACTIVIDAD 1

Resuelva las siguientes ecuaciones lineales.

1) $8x + 9 - 12x = 4x - 13 - 5x$.
2) $5y + 6y - 81 = 7y + 102 + 65y$.
3) $16 + 7x - 5 + x = 4x - 3 - x$.
4) $30x - (-x + 6) + (-5x + 4) = - (5x + 6) + (-8 + 3x)$.
5) $15x + (-6x + 5) - 2 - (-x + 3) = - (7x + 23) - x + (3 - 2x)$.
6) $3x + [-5x - (x + 3)] = 8x + (-5x - 9)$.
7) $x - [5 + 3x - \{5x - (6 + x)\}] = -3$.
8) $9x - (5x + 1) - \{2 + 8x - (7x - 5)\} + 9x = 0$.
9) $5 (x - 1) + 16 (2x + 3) = 3 (2x - 7) - x$.
10) $2 (3x + 3) - 4 (5x - 3) = x (x - 3) - x (x - 5)$.
11) $(4 - 5x)(4x - 5) = (10x - 3)(7 - 2x)$.
12) $14 - (5x - 1)(2x + 3) = 17 - (10x + 1)(x - 6)$.
13) $\frac{3x}{5} - \frac{2x}{3} + \frac{1}{5} = 0$
14) $\frac{1}{2x} + \frac{1}{4} - \frac{1}{10x} = \frac{1}{5}$
15) $\frac{2}{x} - \frac{5}{x} = \frac{7}{10} - \frac{3}{2x} + 1$
16) $\frac{x-2}{3} - \frac{x-3}{4} = \frac{x-4}{5}$
17) $\frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3} - \frac{x-3}{4} = \frac{x-5}{5}$
18) $\frac{2}{3}\left(\frac{x+1}{5}\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{x-6}{3}\right)$

ACTIVIDAD 2

Resuelva los siguientes problemas de aplicación usando ecuaciones de primer grado.

(6) Dos hermanos ganaron B/.1300.00 durante sus vacaciones de verano. El mayor ganó $1^1/_2$ veces más que el otro. Determínese la ganancia de cada uno.
(7) En un grupo de 35 estudiantes había 10 hombres menos que el doble de mujeres. Determínese cuántos había de cada sexo.
(8) Al poner un ribete a un pedazo rectangular de un jardín, cuya longitud era el doble de su anchura, se emplearon 312 ladrillos. Determínese ¿cuántos se pusieron en cada lado?
(9) En una escuela, la mitad de los alumnos menos seis poseen automóviles. El total de automóviles propiedad de los alumnos es 198. ¿Cuántos alumnos hay en la escuela?
(10) Una joven pagó B/.350.00 por un vestido y un sombrero. Determínese el precio del vestido sabiendo que éste costó B/.150.00 más que el sombrero.
(11) Horacio y Saúl van de pesca. Como Horacio es el dueño del bote, convienen en que él tomaría 5 pescados más que Saúl. Si en total pescaron 19 peces, ¿cuántos peces recibe cada uno?
(12) Tomás y Oscar recogieron 36 kilos de fresa. Tomás recogió 3 kilos más que la mitad de los que recogió Oscar. ¿Cuántos recogió cada uno?

UNIDAD 7.
ECUACIÓN CUADRÁTICA DE UNA SOLA INCÓGNITA

Resolución de la ecuación cuadrática

Toda ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con *a, b, c* números reales y $a \neq 0$, se le llama ecuación cuadrática o ecuación de segundo grado. Los números *a, b, c* se denominan coeficientes de la ecuación cuadrática.

Ecuación completa

Si los coeficientes de la ecuación cuadrática son distintos de cero, ella recibe el nombre de ecuación cuadrática completa.

Ejemplos

$3x^2 + 2x - 5 = 0$	$x^2 - 4x - 7 = 0$	$-6x^2 + 9x - 10 = 0$

Ecuación incompleta

Si los valores b ó c, o ambos son ceros, entonces se le llama ecuación cuadrática incompleta. Son posibles tres de ecuaciones cuadráticas incompletas:

1) $ax^2 + bx = 0$ $(c = 0 , a \neq 0 , b \neq 0)$
2) $ax^2 + c = 0$ $(b = 0 , a \neq 0 , b \neq 0)$
3) $ax^2 = 0$ $(a \neq 0 , b = 0 , c = 0)$

Ejemplos

$3x^2 - 5 = 0$	$x^2 + 3x = 0$	$7x^2 = 0$

Resolución de la ecuación cuadrática por factorización

Las raíces o soluciones de una ecuación cuadrática son los valores que satisfacen la ecuación. Las ecuaciones cuadráticas pueden tener dos, una o ninguna solución real.

Resolver una ecuación cuadrática es encontrar todas las raíces o soluciones de las mismas.

La solución de la ecuación cuadrática por el método de factorización, utiliza una importante propiedad de la igualdad; la cual en una de sus partes dice:

Si a y b son números reales, y $a \times b = 0$, entonces: $a = 0$ y $b = 0$.

a) Solución de ecuaciones cuadráticas incompletas

Como la ecuación cuadrática puede ser completa o incompleta, existen varias formas de factorizarlas y por lo tanto distintas maneras de resolverlas. En esta sección examinaremos la solución de las ecuaciones cuadráticas incompletas.

- La ecuación $ax^2 + bx = 0$ se resuelve factorizando el primer miembro mediante factor común monomio: $x(ax + b) = 0$. Luego por la propiedad dada tenemos que:
  $x = 0$ ó $ax + b = 0$, de donde $x = \frac{-b}{a}$.
  De este modo, la ecuación cuadrática incompleta $ax^2 + bx = 0$ tiene dos raíces

  $x_1 = 0$, $x = \frac{-b}{a}$.

- La ecuación $ax^2 + c = 0$, tiene soluciones reales solamente si $c < 0$ y $a > 0$ ó $a < 0$ y $c > 0$. Luego su solución se obtiene mediante la factorización, es

$$\left(x+\sqrt{\frac{c}{a}}\right)\left(x-\sqrt{\frac{c}{a}}\right)=0 \Rightarrow \left(x+\sqrt{\frac{c}{a}}\right)=0 \text{ y } \left(x-\sqrt{\frac{c}{a}}\right)=0$$

$$\Rightarrow x_1 = -\sqrt{\frac{c}{a}} \text{ y } x_2 = \sqrt{\frac{c}{a}}$$

- La ecuación $ax^2 = 0$ tiene una sola solución. Esto es así, debido a que $a \neq 0$ y $ax^2 = 0$, necesariamente $x^2 = 0$. O sea, $x \cdot x = 0$ de donde $x = 0$.

b) Resolución de la ecuación cuadrática completa

En el capítulo anterior vimos que algunos trinomios que son factorizables mediante los casos: trinomio cuadrado perfecto, trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ o trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$.

Por lo tanto para resolver una ecuación cuadrática completa, la factorizamos por el método correspondiente a las características que presenta, luego la transformamos en el producto de dos binomios igualado a cero.

Ejemplos

Hallar las raíces o soluciones de las siguientes ecuaciones.

- $3x^2 + 5x = 0$ se resuelve según el caso $(ax^2 + bx = 0)$.
  Haciendo a = 3, b = 5 tenemos que
$x_1 = 0$ y $x_2 = -{}^b/_a \Rightarrow x_1 = 0$ y $x_2 = -{}^5/_3$.
También puede realizar el proceso completo.
$3x^2 + 5x = 0 \Rightarrow x(3x + 5) = 0$
$\Rightarrow x_1 = 0$ ó $3x + 5 = 0$
$\Rightarrow 3x = -5$
$\Rightarrow x_1 = -{}^5/_3$

- $x^2 - 5x - 6 = 0$.
  Este problema pertenece a un caso de factorización de la sección 5.8. Por tanto factorizamos y obtenemos $x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 1) = 0$.
  Luego $x - 5 = 0$ ó $x + 1 = 0$. Despejando: $x = 5$ ó $x = -1$

- $4x^2 + 5 = 0$, pertenece al caso $ax^2 + c = 0$. No tiene solución ya que $c > 0$ y $a > 0$.

  $9x^2 - 4 = 0$, pertenece al caso $ax^2 + c = 0$, donde $a > 0$ y $c < 0$ su solución es:
$x_1 = \sqrt{\frac{4}{9}}$ ó $x_2 = -\sqrt{\frac{4}{9}}$ $x_1 = -{}^2/_3$ ó $x_2 = {}^2/_3$.

Solución por fórmula general

Las ecuaciones cuadráticas completas o incompletas también se resuelven mediante el uso de la fórmula general .

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2a}$$

Observación

En la fórmula general el valor **a** corresponde al coeficiente de la variable elevada al cuadrado, **b** al coeficiente de la variable con potencia uno y **c** el término independiente. El símbolo ± en la fórmula, indica la existencia de dos soluciones; una utilizando el signo + y la otra el signo menos, delante de la cantidad subradical.

Ejemplos

Hallar las soluciones de la ecuación cuadrática en cada uno de los ejercicios siguientes.

- $x^2 - x - 6 = 0$. En la ecuación tenemos que a = 1, b = 1, c = -6. Reemplazando en al fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-6)}}{2(1)} \Rightarrow$$

$x_1 = 2$ y $x_2 = -3$

- Hallar la solución de la ecuación $9x^2 - 4 = 0$. En esta ecuación a = 3, b = 0 y c = 4. (b = 0 porque la ecuación no tiene x)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4(9)(-4)}}{2(9)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-0 \pm \sqrt{0 + (16)(9)}}{18} \Rightarrow x = \frac{0 \pm \sqrt{(16)(9)}}{18}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pm(4)(3)}{18} \Rightarrow x_1 = \frac{-(4)(3)}{18} \text{ y } x_2 = \frac{(4)(3)}{18}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-2}{3} \text{ y } x_2 = \frac{2}{3}$$

ACTIVIDAD 1

- Resuelva las siguientes ecuaciones por factorización.

1) $4x^2 - 49 = 0$	2) $9x^2 - 25 = 0$
3) $5x^2 - 45 = 0$	4) $6x^2 - 24 = 0$
5) $x^2 + 1 = 0$	6) $9x^2 + 16 = 0$
7) $x^2 - 2x - 3 = 0$	8) $x^2 - 2x = 8$

9) $x^2 + 3x - 10 = 0$	10) $2x^2 + 3x = 0$
11) $4x^2 - 9 = 9x$	12) $12x^2 + 12x = 25$
13) $6x^2 + 4x = 0$	14) $15x^2 + 9x = 18$
15) $30x^2 - x - 20 = 0$	16) $2x^2 - 3x = 0$
17) $25x^2 - 30x = 0$	18) $24x^2 - 2x = 1$

- Resuelva las siguientes ecuaciones usando la fórmula general.

1) $5x^2 - 45 = 0$	2) $6x^2 - 24 = 0$
3) $x^2 + 3x - 10 = 0$	4) $2x^2 + 3x = 0$
5) $4x^2 - 9 = 9x$	6) $12x^2 + 12x = 25$
7) $x^2 + 5 = 5x$	8) $x^2 - 3 = - x$
9) $9x^2 - 2 = 18x$	10) $x^2 - 10x + 5 = 0$

UNIDAD 8.
SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas es el conjunto de dos ecuaciones, cada una de ellas, de primer grado y en dos variables.

Ejemplos

$\begin{cases} x + 6y = 27 \\ 7x - 3y = 9 \end{cases}$	$\begin{cases} 8x - 5 = 7y - 9 \\ 6x = 3y + 6 \end{cases}$

Solución de un sistema de ecuaciones de primer grado en dos variables

La solución de un sistema de ecuaciones es el conjunto de valores de x, e y que satisfacen la ecuación. Estos valores se encuentran aplicando los métodos de igualación, sustitución, adición o sustracción (reducción) y determinante.

Método de adición o sustracción.

En este método debemos lograr que el coeficiente de una variable determinada, en ambas ecuaciones, tenga el mismo valor numérico, pero con signos diferentes. Luego sumamos las ecuaciones, transformando las dos ecuaciones en una ecuación de primer grado en una variable, la que se resuelve por métodos conocidos.

Para igualar los coeficientes de una variable, cada ecuación debe multiplicarse por el cociente de dividir el coeficiente de la variable elegida entre el mínimo común múltiplo de los coeficientes de dichas variables. Una vez igualado los coeficientes de una variable en ambas ecuaciones, multiplique una de ellas por -1.

Ejemplo

$$\begin{cases} 8x - 5 = 7y - 9 \\ 6x = 3y + 6 \end{cases}$$

Reducimos cada una de las ecuaciones para darle la forma:

$$\begin{cases} 8x - 7y = -4 \\ 6x - 3y = 6 \end{cases}$$

Elegimos eliminar la variable x, por lo tanto buscamos el mínimo común múltiplo de 8 y 6 que es igual a 24. Luego realizamos las divisiones de 24 entre cada uno de los coeficientes de las variables x. O sea, $24 \div 8 = 3$ y $24 \div 6 = 4$. Por lo tanto la primera ecuación se multiplica por 3 y la segunda por -4. El signo (-) se debe a que las x deben tener coeficientes con signos contrarios. Luego tenemos las nuevas ecuaciones:

$$24x - 21y = -12$$
$$-24x + 12y = -24$$

Su suma es igual a:

$$\begin{array}{rl} 24x - 21y & = -12 \\ \underline{-24x + 12y} & \underline{= -24} \\ -9y & = -36 \end{array}$$

Resolviendo para y tenemos y = 4. Sustituyendo y = 4 en la ecuación (1) tenemos:
$8x - 7y = -4 \Rightarrow 8x - 7(4) = -4 \Rightarrow 8x - 28 = -4 \Rightarrow 8x = -4 + 28 = 8x \Rightarrow 24 = x = 3$. Luego, la solución del sistema de ecuaciones esta dado por los valores x = 3 y y = 4.

Ejemplos

$$\begin{cases} \frac{2X}{5} - \frac{1y}{4} = 2 \\ 2X = \frac{1y}{2} \end{cases}$$

Para resolver este ejemplo, transformamos las ecuaciones con coeficientes fraccionarios en ecuaciones con coeficientes enteros. Para ello, multiplicamos los términos de cada ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores de las cantidades fraccionarias de cada una de ellas. Así, $\frac{3x}{5} - \frac{1y}{4} = 2$ es igual a, $20\left(\frac{3x}{5} - \frac{1y}{4}\right) = 20(2)$

Simplificando tenemos que se transforma en

12x-5y= 40 (1)

De forma similar en $2x = \frac{5y}{2}$ se obtiene

4x - 5y = 0 (2)

Luego obtenemos el nuevo sistema.

$$\begin{cases} 12x - 5y = 40 \\ 4x - 5y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} 12x - 5y = 40 \\ \underline{-4x + 5y = 0} \end{array}$$ Multiplicando la ecuación (2) por (-1)

$$\begin{array}{rl} 8x + 0 & = 40 \\ 8x & = 40 \\ x & = {}^{40}/_{8} \\ x & = 5 \end{array}$$

Sustituyendo el valor de x en la ecuación 4x-5y = 0, tenemos:

$$\begin{array}{rl} 4(5) - 5y & = 0 \\ 20 - 5y & = 0 \\ -5y & = -20 \\ y & = {}^{-20}/_{-5} \\ y & = 4 \end{array}$$

La solución del sistema de ecuación es x = 5, y = 4.

Problemas de aplicación

Para plantear algunos problemas necesitamos usar varias variables, ya que en ellos pueden aparecer muchas cantidades desconocidas, y la transformación de su enunciado en ecuaciones que permitan su resolución, se facilita a usar mas de una incógnita.

El procedimiento general para obtener las ecuaciones es similar al utilizado en las ecuaciones lineales. Ello depende en gran parte, de la habilidad individual de cada lector para transformar los enunciados en las expresiones, (ecuaciones) que le permitan resolver el problema.

Ejemplo

El gerente de una librería estimaba un ingreso de B/400.00 en la venta de plumas, B/5.00 cada una, y lápices B/2.50 cada uno. Después de haber vendido la mitad de las plumas y la cuarta parte de los lápices reduce el precio de las primeras a B/4.50 y el de los segundos a B/2.00. Este remanente le produce un ingreso de 202.50. ¿Cuántas plumas y cuántos lápices vendió en total?

Solución

Sea x = cantidad de plumas vendidas a 5.00
y = cantidad de lápices vendidos a 2.50

Luego el ingreso obtenido al vender el total de ambos productos es:
$5x + 2.5y = 400.$

$x - {}^1/_2x$ = Número de plumas después de vender la mitad de ellas.
$y - {}^1/_4y$ = Número de lápices después de vender un cuarto de ellos.

Ingreso obtenido al vender las plumas y lápices que quedaron, después de reducir el precio.

$$4.50\left(x-\frac{1}{2}x\right)+2.00\left(y-\frac{1}{4}y\right) \Longrightarrow 4.50\left(\frac{1}{2}x\right)+2.00\left(\frac{3}{4}y\right)=202.50$$

$2.25x + 1.5y = 202.50$

Sistema de ecuaciones resultante.

$2.25x + 1.5y = 202.50$
$5x + 2.5y = 400$

$225x + 150y = 20{,}250$
$50x + 25y = 4{,}000$

Resolvemos el sistema por reducción.
$225x + 150y = 20{,}250$
$50x + 25y = 4{,}000$

$225x + 150y = 20{,}250$
$\underline{-300x - 150y = -24{,}000}$
$-75x = -3{,}750$

$$x = \frac{-3750}{-75}$$
$$x = 50$$

Sustituyendo en la ecuación: $50+25y = 4{,}000$

$50(50) + 25y = 4{,}000$
$2500 + 25y = 4{,}000$
$25y = 4{,}000-2500$
$25y = 1500$

$$y = \frac{1500}{25}$$
$$y = 60$$

Se vendieron 50 plumas y 60 lápices.

Ejemplo

Un propietario recibió B/.1,200 por pago de la renta de dos oficinas en el año 1984. La renta mensual de una era B/.10.00 mayor que la otra. ¿Cuál fue la renta mensual que recibió de cada una si la mas cara estuvo desalquilada dos meses.

Solución

Sea, x = renta mensual de la oficina mas cara.

y = renta mensual de la oficina mas barata.

Como la oficina mas cara estuvo desalquilada dos meses, entonces recibió por su alquiler 10 x balboas y por la más barata 12x balboas. Los B/.1,200, total recibido por el alquiler de las dos oficinas, es igual a la suma de las rentas anuales de cada una de ellas. Así obtenemos la ecuación: $10x + 12y = 1200$.

Como la oficina mas cara vale mensualmente, 10 balboas mas que la otra, de aquí obtenemos la segunda ecuación $x - y = 10$. Luego, formamos y resolvemos el sistema:

$$\begin{aligned} 10x + 12y &= 1200 \\ x - \quad y &= 10 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema por el método de reducción tenemos:

$$\begin{aligned} 10x + 12y &= 1200 \\ \underline{12x - 12y} &= \underline{120} \\ 22x &= 1320 \end{aligned}$$

$$x = \frac{1320}{22}$$

$$x = 60$$

Reemplazando $x = 60$, en la ecuación $x - y = 10$, obtenemos $60 - y = 10$, de donde $y = 50$.

UNIDAD 9.
RESOLUCIÓN DE FÓRMULAS

Una fórmula es una expresión que establece una relación entre varias magnitudes. Toda fórmula establece una igualdad, por lo tanto el siguiente método práctico es útil para despejar cualquier variable en una fórmula dada.

Método práctico

Cualquier término de una ecuación se puede pasar de un miembro a otro. Al transponerlo ejecutará en el otro miembro, la operación contraria a la que realiza antes de moverlo.

Ejemplo

En la fórmula $S = C(1 + it)$ despejar i.

$$C(1 + it) = S \Rightarrow 1 + it = \frac{S}{C} \Rightarrow it = \frac{S}{C} - 1 \Rightarrow$$

$$i = \frac{\frac{S}{C} - 1}{t} \Rightarrow i = \frac{S - C}{Ct}$$

ACTIVIDAD 1

Resuelva los siguientes problemas:

- En $a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$, despejar x.
- En $V = V_0 + at$, despejar V_0, a y t.
- En $a^2 = b^2 + c^2$, despejar b y c.
- En $e = V_0t + {}^1/_2at^2$, despejar V_0.
- En $e = V_0t - {}^1/_2at^2$, despejar V_0 y a.
- En $V = {}^1/_3h - r^2$, despejar h y r.
- En $I = \frac{ctr}{100}$ 1, despejar c, t y r.
- En $u = a + (n-1)r$, despejar a, n y r.

SECCIÓN DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

UNIDAD 10. LA RECTA

Objetivos

- Determinar la ecuación de las rectas.
- Encontrar la pendiente de una recta.
- Determinar la ecuación de una recta si se conocen dos de sus partes.
- Determinar la ecuación de una recta si se conoce su pendiente y un punto.

La representación gráfica del lugar geométrico cuya ecuación se de primer grado en dos variables es una línea recta, así la ecuación

$$Ax + By + C = 0,$$

donde A, B y C son constantes con A y B no simultáneamente cero, es una ecuación general de primer grado y la gráfica de esta ecuación es una línea recta.

Si en esta ecuación general se despeja la variable *y*, entonces la ecuación toma la forma

$$y = mx + b$$

donde *m* y *b* son números reales y su representación en el plano cartesiano es una recta con intersección con el eje y en (0, *b*) y *m* representa la pendiente de la recta y determina la inclinación de la recta.

Ejemplo:

Determine la pendiente y el punto de intersección con el eje *y*.

Solución:

En este caso la pendiente es 2 y el punto de intersección con el eje *y* es (0, -3).

Recuerde que la pendiente de una recta se define como la tangente del ángulo de inclinación

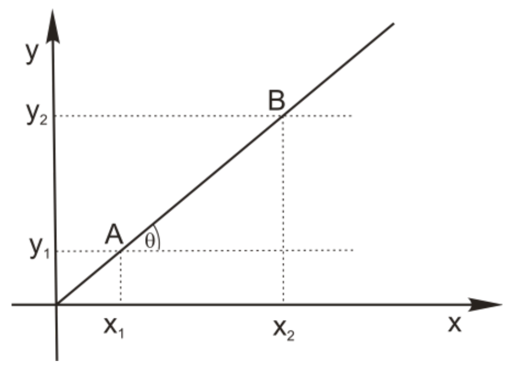


Figura 1.

De esta forma, dados dos puntos cualesquiera A(x1, y1) y B(x2, y2) sobre una recta, el valor de m, de la pendiente de la recta coincide con la tangente del ángulo de inclinación θ de la recta (ver figura 1) y así,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ejemplo

Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos (-2, -3) y (4, 2). Sustituyendo en la ecuación anterior, tenemos

$$m = \frac{2-(-3)}{4-(-2)} = \frac{5}{6}$$

Formas de la ecuación de una recta

a) *Cartesiana:* La ecuación de una recta que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y

$P_2(x_2, y_2)$ es:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$

Ejemplo

Hallar la ecuación de la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(3,-1) y B(-4,5). Utilizando la fórmula anterior tenemos:

$$\frac{y-(-1)}{x-3}=\frac{-1-5}{3-(-4)} \quad \Rightarrow \quad \frac{y+1}{x-3}=\frac{-6}{7}$$

$$\Rightarrow \ 7y+7=-6x+18$$

$$\Rightarrow \ 7y+6x-11=0$$

La ecuación de la recta que pasa por (3, -1) y (-4, 5) es $7y+6x-11=0$.

b) *Punto pendiente:* La ecuación de una recta que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$ y cuya pendiente sea *m* es:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

Ejemplo

Hallar la ecuación de la ecuación de la recta que pasa por el punto (-4,3) y tenga de pendiente ½.

Utilizando la ecuación punto pendiente tenemos que

$$y-3=\frac{1}{2}(x+4) \quad \text{o sea} \quad 2y-6=x+4$$

es decir,

$$x-2y+10=0$$

ACTIVIDADES

Hallar las ecuaciones de las rectas que satisfacen las condiciones siguientes:

a) Pasa por los puntos (-1,4) y (3, 2).
b) Pasa por los puntos (-2, -3) y (4, 2).
c) Pasa por (0,7) y su pendiente es *m* = -4.
d) Pasa por (3,1) y tiene pendiente *m* = 2.
e) Pasa por (5, -2) y su pendiente es $^{-5}/_{2}$.

UNIDAD 11.
LA CIRCUNFERENCIA

Objetivo

- Determinar la ecuación general de la circunferencia con centro en C(*h*, *k*) y dado su radio r.

Una circunferencia en el lugar geométrico de un punto que se mueve sobre el plano, de tal manera que su distancia desde un punto fijo del plano permanece constante. Si consideramos que el punto fijo, al que llamaremos centro, está en C(*h*, *k*) y la distancia entre C y el punto P(x, *y*) es igual al radio r entonces la ecuación de la circunferencia es

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Como esta ecuación muestra las coordenadas del centro y la longitud del radio, se llama *forma centro radio* de la ecuación de la circunferencia, ver la figura 2.

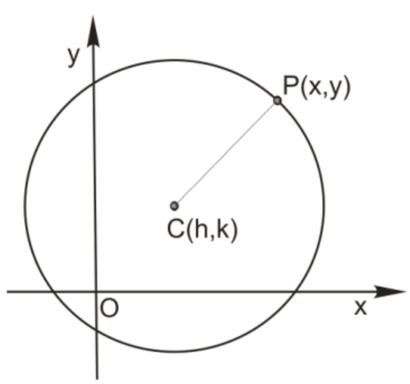


Figura 2.

Si el centro está en el origen (0, 0) y el radio es r, su ecuación es:

$$x^2+y^2=r^2$$

Ejemplo
Si el centro de la circunferencia está en (3, -2) y el radio es 4, la ecuación es:

$$(x-3)^2+(y+2)^2=16$$

Si desarrollamos los cuadrados obtendremos la ecuación

$$x^2-6x+9+y^2+4y+4=16$$

Que equivale a

$$x^2+y^2-6x+4y-3=0\,,$$

Esta última ecuación es de la forma

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

que representa la *forma general* de la ecuación de una circunferencia.

ACTIVIDADES

Encontrar la ecuación de la circunferencia que tiene las condiciones señaladas en cada problema:

a) Centro en (0, 0) y radio igual a $\sqrt{7}$.
b) Centro en (2, -6) y radio 5.
c) Centro en (0, 4) y radio 4.
d) Centro en (4, 3) y radio 5.
e) Centro en ($^5/_3$, $^1/_3$) y radio $\sqrt{3}$.
f) Centro en (-3, 1) y pasa por (5, -3).
g) Centro en (4, 2) y pasa por (-1, -1).

UNIDAD 12.
LA PARÁBOLA

Objetivos

- Determinar la ecuación canónica de una parábola con vértices en (0, 0) conociendo alguno de sus elementos.
- Dada la ecuación general de la parábola con vértice (0, 0) determinar sus elementos.

Una parábola es el conjunto de los puntos P(*x*, *y*) del plano equidistantes de una recta fija *L* y un punto fijo *F*. El punto fijo *F* se llama foco; las rectas fijas es la directriz. En la figura 3 se muestra una parábola con sus elementos.

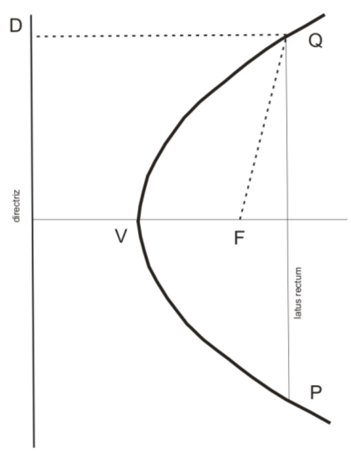


Figura 3.

Donde F es el foco y D es la directriz. El punto V situado a la mitad entre el foco y la directriz está sobre la parábola. Este punto se llama vértice. La ecuación de una parábola con vértice en (0, 0) con foco en (a, 0) es:

$$y^2 = 4ax \quad (*)$$

Si a > 0, la parábola abre hacia la derecha, si a < 0, abre hacia la izquierda como se pude observar en la figura 4.

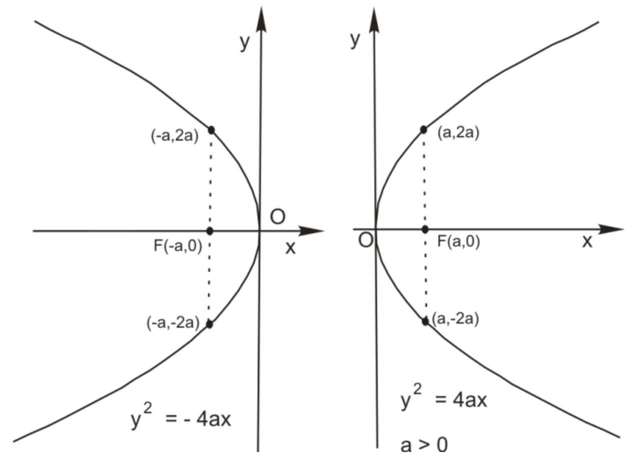
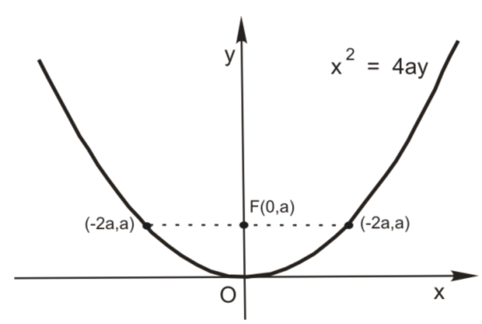


Figura 4.

La ecuación de una parábola con vértice en el origen y foco en (0, a) es:

$$x^2 = 4ay \quad (**)$$

Si la parábola que abre hacia arriba si se tiene que a > 0, y abre hacia abajo si a < 0, como se puede observar en la figura 5.



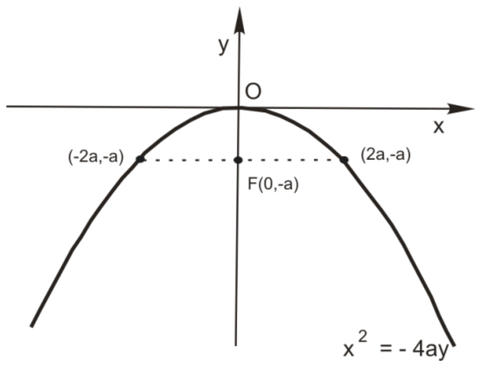


Figura 6.

Las ecuaciones (*) y (**) pueden utilizarse para encontrar las ecuaciones de las parábolas que satisfacen condiciones específicas.

Ejemplo

Escriba la ecuación de la parábola con vértice en el origen y foco en (0, 4). Aplicamos la ecuación (**), la distancia del vértice al foco es 4 y así a = 4, luego tenemos que:

$$x^2 = 16y$$

que es la ecuación buscada.

Ejemplo

Una parábola tiene su vértice en el origen, su eje a lo largo del eje x, y pasa a través del punto (-3, 6). Hallar la ecuación.

La ecuación de la parábola es de la forma (*) . Para determinar el valor de a, sustituimos las coordenadas del punto en esta ecuación, obteniendo,

$$36 = 4a(-3) \Rightarrow -12 = 4a \Rightarrow a = -3$$

La ecuación general de la parábola es $y^2 = -12x$, y el foco está en (-3, 0)

Ejemplo

La ecuación de la parábola es $x^2 = -6y$. Hállense las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud del latus rectum.

La ecuación es de la forma (**) , donde a es negativa. Si hacemos la igualdad

$$4a = -6$$

obtenemos que a = - 3/2. Así, la coordenada del foco es (0, - 3/2) y la directriz es y = 3/2. La longitud del latus rectum es exactamente igual a *4a* , por lo que

latus rectum = 4(3/2) = 6.

ACTIVIDADES

1. Hallar las coordenadas del foco, las coordenadas de los extremos del latus rectum y la ecuación de la directriz de cada parábola en los problemas
   - $y^2 = -16x$
   - $x^2 = 12y$
   - $x^2 = -10y$
   - $x^2 - 8y = 0$
2. Escriba la ecuación de la parábola con vértices en el origen y que satisface la condición dada en cada problema.
   - Foco en (3,0)

- Directriz x + 6 = 0
- Foco en (-4, 0)
- Latum rectumn es 12 y abre hacia la derecha.
- Foco sobre el eje y pasa a través de (2,8)
- Se abre hacia la izquierda y pasa a través de (-1,-1).

UNIDAD 13.
LA ELIPSE

Objetivos

- Determinar la ecuación canónica de la elipse con centro en (0, 0), conociendo algunos de sus elementos.
- Dada la ecuación general de una elipse con centro en (0, 0) determinar sus elementos.

La elipse es el conjunto de puntos en un plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos es constante. Los puntos fijos se llaman *focos* y los denotaremos F_1 y F_2.

Sean los puntos fijos $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$ y 2a la suma constante, a > 0. Si consideramos que P(x, y) es un punto cualesquiera sobre la elipse se observa, de acuerdo a lo siguiente figura $F_1P + PF_2 = 2a$, de acuerdo a la definición y dado que V_1 y V_2 son puntos sobre la elipse, se muestran en la figura 7.

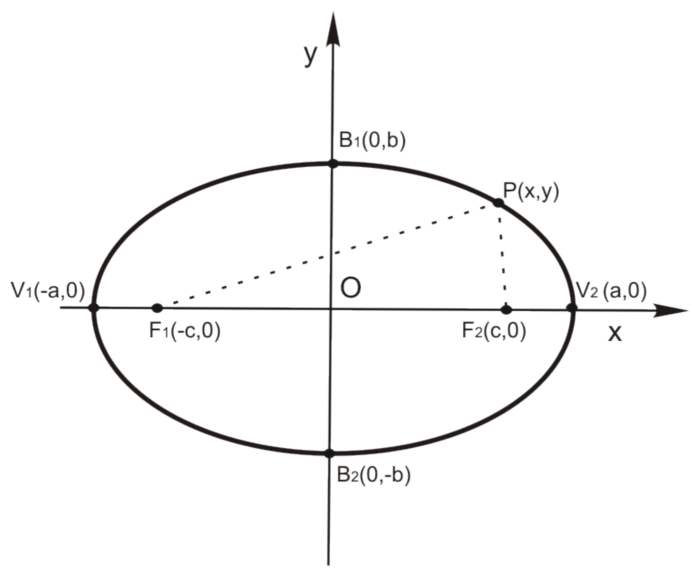


Figura 7.

El *centro de la elipse* que consideramos en este caso en (0,0), es el punto medio del segmento F_1F_2. Se llama *eje mayor de la elipse* al segmento V_1V_2 que pasa por el centro de la elipse, contiene los focos y sus puntos extremos V_1 y V_2 pertenecen a la elipse. V_1 y V_2 son los *vértices* de la elipse. Se llama *eje menor* al segmento B_1B_2 que pasa por el centro de la elipse y es perpendicular al eje mayor.

La ecuación canónica de la elipse con centro (0, 0) y eje mayor sobre el eje x es:

(1*) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{con} \quad a^2 - b^2 = c^2$$

Si los focos fueran los puntos (0, c) y (0, -c), el eje mayor estaría sobre el eje *y* y la ecuación resulta de la forma

(2*) $$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \quad \text{con} \quad a^2 - b^2 = c^2$$

Ejemplo

Hallar la ecuación de la elipse de centro en el origen y foco (0, 3) y semieje mayor igual a 5. El eje mayor está sobre el eje *y* . Luego la ecuación buscada corresponde a la forma (2*). Como el semieje mayores igual a 5 entonces a= 5. Además c = 3. Luego

$$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{25-9}=4$$

Sustituyendo en (2*) se obtiene la ecuación

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$$

Ejemplo

Dada la elipse $9x^2 + 16y^2 = 576$, hallar la ecuación canónica correspondiente, las coordenadas de los focos y las coordenadas de los vértices.

Dividiremos por 576 la ecuación dada y obtenemos

$$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$$

Luego la elipse tiene focos y vértices sobre el eje x y esta ecuación es de la forma (1*) . Luego a = 8, b = 6 y

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{64-36}=\sqrt{28}=\sqrt{7(4)}=2\sqrt{7}$$

Luego las coordenadas de los vértices son (8,0) y (-8, 0). Las de los focos son $(2\sqrt{7},0)$ y $(-2\sqrt{7},0)$

ACTIVIDADES

1. Obtenga la ecuación de la elipse con un foco en (2,0) y un vértice en (5,0).
2. En cada una de las siguientes elipses, hallar las coordenadas de los vértices y de los focos.

- $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=2$
- $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{144}=1$

- $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{12}=1$
- $225x^2+289y^2=65025$
- $x^2+6y^2=6$
- $4x^2+9y^2=36$
- $4x^2+9y^2=4$

3. Hallar las ecuaciones de la elipse que satisfagan las condiciones indicadas

a) Focos (±4, 0), y vértices (±, 5) .
b) Focos (0, ±6) semieje menor 8.
c) Centro (0,0), vértice (±5, 0) y b = 2.
d) Vértice (0, ±7) intersección con x (± 4, 0).

UNIDAD 14.
LA HIPÉRBOLA

Objetivos

- Determinar la ecuación canónica de la hipérbola con centro en (0,0) conociendo algunos de sus elementos.
- Dada la ecuación general de una hipérbola con centro en (0,0) determinar sus elementos.

Una hipérbola es el conjunto de puntos en un plano cuya diferencia de distancias a los puntos fijos F_1(c, 0) y F_2(-c, 0) es constante e igual a 2a (ver figura 8).

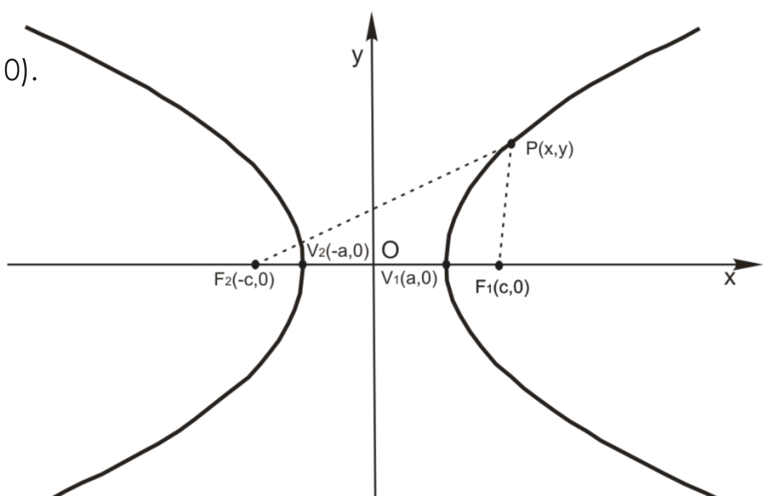


Figura 8

Sea P(x, y) un punto cualquiera de la curva:

- Por definición F_1P - PF_2 = 2ª.
- El centro de la hipérbola que consideramos en este caso en (0, 0) es el punto medio del segmento F_1F_2.
- El eje real o transversal de la hipérbola es A'A de longitud 2ª. Los puntos A'(-

a,0) y A (a,0) son los vértices de las parábolas.

- Los focos $F_1(-c,0)$ y $F_2(c,0)$ se encuentran sobre el eje transversal.
- El eje imaginario es B'B de longitud 2b.
- Una hipérbola consta de dos curvas separadas.

La ecuación de la hipérbola con centro en (0, 0) y focos en el eje x es:

(1*) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ con $c^2 - a^2 = b^2$

Si los focos fueran (0, c) y (0, - c) la ecuación sería de la forma

(2*) $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ con $c^2 - a^2 = b^2$

Ejemplo

Dada la hipérbola

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Obtener los vértices, focos y longitud del eje transversal e imaginario. Trazar la hipérbola y mostrar los focos.

La ecuación dada es de la forma (1*) , luego a = 3 y b = 4. Así los vértices son los puntos $V_1(-3,0)$ y $V_2(3,.0)$. El eje transversal tiene una longitud de $2^a = 6$ y el eje imaginario mide 2b = 8. Como $b^2 = c^2 - a^2$ entonces $c^2 = a^2 + b^2$, obteniendo

$$c = \sqrt{9+16} = 5$$

Por lo tanto los focos están en $F_1(-5, 0)$, $F_2(5,0)$.

Ejemplo

Determinar una ecuación de la hipérbola que tiene un foco en (5,0) y los extremos de su eje imaginario son (0, 2) y (0, -2).

Observamos que el eje principal o transversal está sobre el eje x pues el foco tiene coordenadas (5, 0). Tenemos que c = 5 y b = 2. Luego $a^2 = c^2 - b^2$ y así

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$$

Y la ecuación canónica de la hipérbola es:

$$\frac{x^2}{21} - \frac{y^2}{4} = 1$$

Actividades

1. Hallar los vértices, los focos de las hipérbolas siguientes:
   - $y^2 - x^2 = 9$
   - $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$
   - $4x^2 - 25y^2 = 100$
2. Hallar las ecuaciones de las hipérbolas que satisfacen las condiciones siguientes:

a) Eje transversal 8; focos (±5, 0).
b) Eje imaginario 24, focos (0, ±13)
c) Centro (0, 0), foco (5/2, 0), eje imaginario 2.

MÓDULO INSTRUCCIONAL

ÁREA CIENTÍFICA

QUÍMICA

DOCUMENTO REALIZADO POR:

ESCUELA DE QUÍMICA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

2013

UNACHI
Hombre y cultura para el porvenir

Universidad Autónoma de Chiriquí

Ciudad Universitaria, David,
Chiriquí, República de Panamá
admision@unachi.ac.pa
Tel.:(507) 775-3485
Fax: (507) 774-2679
www.unaci.ac.pa

FICHA TÉCNICA
11 pulgadas
31 páginas
El contenido académico de este módulo, esta bajo la
responsabilidad de los especialistas de la Facultad.

Publicado por la Dirección de Admisión, 2013

Presentación

Es recomendable iniciar el estudio con la lectura de todo el módulo que contiene las cinco unidades de Química. Esta lectura te familiarizará con el contenido, la secuencia, extensión y organización de las unidades. Así mismo al leer irás "*despertando*" tu aprendizaje sobre Química.

Cada unidad consta de porciones de información, actividades y tareas. Estas actividades tienen una función en cada unidad. Por ello, se recomienda no avanzar de una unidad a otra, sin haber desarrollado las actividades y las tareas.

Notarás que el diseño de las unidades enfatiza el aprendizaje de conceptos. Dominar un concepto, por ejemplo, *mezcla heterogénea* no significa recitar su definición, significa además de comprender, aplicar y utilizar este concepto. Si un estudiante domina aceptablemente estos conceptos obtendrá mejores resultados en sus experiencias de aprendizaje y será más exitoso al resolver problemas de aplicación. La resolución mecánica es muy vulnerable.

UNIDAD 1. LA QUÍMICA

Objetivos específicos

- Reconocer a la Química como la ciencia central de la vida.
- Identificar algunas sustancias químicas que se relacionen con nuestra vida cotidiana.
- Valorar la importancia de la Química en la solución de los problemas de la humanidad.

Presentación

Lee la unidad, subraya las ideas que consideres más importantes. Resuelve las actividades en el orden en que aparecen. Luego evalúa si has logrado los objetivos respondiendo:

- ¿Por qué consideras que la Química es importante para el desarrollo de la vida?
- Da ejemplos de sustancias químicas útiles y necesarias para el ser humano y los seres vivos en general.
- Da ejemplos de sustancias nocivas para el ser humano y los seres vivos en general.

INTRODUCCIÓN

La química es el estudio de la materia, de su composición y de los cambios que experimenta.

Te has puesto a pensar que nuestro planeta Tierra está formado por una serie de sustancias que se unen, se mezclan y se combinan para formar una gran diversidad de materiales los cuales pueden encontrarse diferentes estados (sólido, líquido y gaseoso). Por ejemplo, la Geosfera (sólida), la hidrosfera (líquida) y la atmósfera (gaseosa), estas capas permanecen en constante agitación y existe transferencia de materias entre ellas, y además de que absorben parte de la energía radiante que llega del Sol.

Cada una de las capas terrestres posee componentes indispensables para la supervivencia de los seres vivientes. El hombre extrae de la naturaleza para su beneficio materias primas como: minerales metálicos, petróleo, carbón, sal, agua, azufre, calizas, arcillas e incluso oxígeno y nitrógeno del aire, etc., los cuales transforma en diversos productos terminados como son: jabones, dentífricos, medicamentos, abonos, plásticos, papel, fibras, explosivos, electrodomésticos, automóviles, sustancias alimentarias, elaboradas y sintéticas, etc.). Como consecuencia del desarrollo científico y tecnológico, la explotación de los recursos naturales le ha proveído al hombre, no sólo muchos bienes y servicios, sino también la degradación del ambiente por la producción de desechos, subproductos y residuos que dañan nuestro entorno.

Te habrás dado cuenta con la lectura que existe una serie de compuestos químicos que utilizamos cotidianamente, indispensables para sostener la vida sobre el planeta o que utilizamos en nuestro beneficio. Algunos de estos compuestos son inorgánicos y se derivan principalmente de fuentes minerales, mientras que otros tipos de compuesto son de origen orgánico ya que provienen de fuentes animales o vegetales.

La naturaleza le ha proporcionado al ser humano una serie de sustancias indispensables para la subsistencia. Sin embargo, en su afán por conocer cada día más, se pasa las horas probando sustancias que somete a transformaciones químicas, en su intento por encontrar productos para su beneficio y de la humanidad. Para elaborar estos productos de consumo, necesita algunas veces de productos intermedios o básicos, los cuales somete a una serie de procesos y éstos a su vez se obtienen de los recursos naturales. Así por ejemplo, el abono nitrato amónico es un producto de consumo que se obtiene del aire y del agua (materia prima), previa síntesis del amoníaco y el ácido nítrico (productos intermedios).

Hay química también dentro y fuera de nuestro cuerpo, por ejemplo al leer, reír, correr, pensar, se produce una multitud de reacciones químicas ordenadas. En síntesis la química es una ciencia que nos ha llevado a conocer, interpretar y transformar nuestro ambiente.

ACTIVIDAD 1

- De acuerdo con lo leído, ¿cuál es el significado de Química?. Exprese cómo esta ciencia ha ayudado al hombre.

Tarea 1

- Investiga de dónde provienen algunos productos que consumes o utilizas frecuentemente en tu hogar.
- Toma envases o paquetes de algunos productos utilizados en tu hogar, lee los nombres de algunos ingredientes y escribe los elementos que pueden estar presentes en dichos compuestos. Contesta la siguiente pregunta: ¿Cuál es la sustancia principal (materia prima básica) en cada uno de estos compuetos?

LA QUÍMICA EN NUESTRA VIDA COTIDIANA

Hemos podido constatar que nuestro actual modo de vida depende de la utilización de los procesos químicos, los cuales proporcionan muchos bienes y servicios; sin embargo, la mayoría de los seres vivos aprovechan la materia tal como se encuentra en la naturaleza. El ser humano es diferente, puesto que generalmente transforma la materia antes de usarla, en productos terminados que utiliza en el hogar, la industria, la medicina, la agricultura; pero al mismo tiempo, produce desechos y residuos peligrosos que dañan el ambiente. En este apartado vamos a reflexionar sobre esta problemática, ya que la utilización de la ciencia en beneficio de la humanidad elevará nuestra calidad de vida, pero su uso inadecuado puede llevarnos a la desaparición de la especie humana.

ACTIVIDAD 2

Analiza las siguientes reflexiones, elabora preguntas y busca alternativas de solución a la problemática planteada:

"...hoy cuando el impacto del hombre en su ambiente es tan grande, es de vital importancia que todos los ciudadanos responsables, científicos o no, aprendan todo lo posible sobre los principios científicos en los que se basa la relación del hombre con su medio ambiente"

"Se calcula que si para el año 2000 los 6000 millones de habitantes, que está calculado existirán sobre la Tierra, continúan con el avance tecnológico e industrial y adoptan las formas de vida de la sociedad de consumo, la carga total de contaminación del ambiente será 10 veces mayor que la actual. Frente a los altos grados de contaminación existentes el período de vida de la población puede disminuir y aumentar la presencia de enfermedades por sustancias tóxicas..."

"El dióxido de azufre se encuentra en el aire contaminado y es uno de los contaminantes más peligrosos para el ser humano. Pequeñas cantidades de dióxido de azufre en el aire parece que incrementan la oxidación de los productos con hierro. Esta disminución de la vida del producto hace necesario que este sea reemplazado antes de lo esperado, por lo tanto, incrementa su costo..."

"Los alimentos procesados químicamente pueden contener sustancias nocivas al organismo, por ejemplo, los nitritos en las carnes de salsamentaría, que al ser consumidos, frecuentemente y en exceso pueden producir cáncer, así como algunos alimentos o bebidas que contienen colorantes perjudiciales".

"En la guerra de Vietnam (esta terminó en 1975), los estadounidenses arrasaron el follaje con el llamado agente naranja ó 2,4,5 triclorofenoxietanoico; hoy día se sabe que no sólo afecta a las plantas sino también a los humanos."

UNIDAD 2. LA MATERIA

Objetivos Específicos

- Elaborar un diagrama que ilustre la clasificación de la materia.
- Reconocer la relación entre materia y energía.
- Clasificar diferentes sustancias, de acuerdo con el tipo de materia al que pertenecen.
- Proponer procedimientos para separar mezclas.
- Reconocer la participación de la energía en la transformación entre diferentes estados de la materia.
- Describir la organización molecular entre diferentes estados de la materia.
- Clasificar las propiedades físicas, de acuerdo con su dependencia de la cantidad de sustancia que forma el sistema bajo estudio.
- Diferenciar los cambios que sufre la materia según sean procesos físicos o químicos.
- Distinguir entre propiedades y cambios físicos o químicos.

Presentación

Lee la unidad completa. Subraya los conceptos importantes. Resuelve las actividades y tareas en orden secuencial.

Al finalizar la unidad, utiliza la actividad 6 para retro alimentar. Observe que esta actividad muestra un mapa conceptual de la materia desde un nivel microscópico, hasta un nivel macroscópico y subatómico.

Trate de redactar un ensayo con este mapa conceptual. Titule su ensayo así: *La materia*. Para su ensayo inicie desde arriba y recorra toda la jerarquía del mapa hasta el nivel inferior.

Introducción

Al tratar de comprender los cambios que ves a tu alrededor quizás te surgen preguntas tales como ¿Por qué crecen las plantas y son de color verde? ¿Por qué la madera se quema y las rocas no? ¿Por qué los rumiantes son herbívoros y los cerdos son omnívoros? ¿Por qué calienta el sol? ¿Cómo funciona el jabón?

Para encontrar respuestas a estas preguntas y otras es necesario conocer la naturaleza de la materia, su organización y el tipo de cambios que ésta puede sufrir. Si bien el término materia está incorporado a nuestro lenguaje cotidiano las cosas se nos complican cuando queremos definirla e indagar más allá de lo que intuitivamente conocemos. La manera más sencilla de definir la materia es decir que es todo aquello que tiene masa, ocupa un lugar en el espacio y que es perceptible, es decir que puede impresionar nuestros sentidos sea en forma directa o indirecta. Ejemplos de materia son el aire, una silla, los seres vivos, etc.

CLASIFICACIÓN DE LA MATERIA

La materia se puede clasificar, según su composición en sustancias puras y mezclas.

Sustancia pura es aquella forma de materia que tiene una composición constante o definida. Las sustancias puras están formadas por un solo tipo de partículas. Las sustancias puras pueden ser elementos (Hierro, hidrógeno, sodio) o compuestos (agua, azúcar, urea).

Las mezclas son combinaciones de dos o más sustancias en las cuales las sustancias conservan sus propiedades y características. Por ejemplo: aire, acero o sal disuelta en agua. Las mezclas no tienen una composición constante y sus componentes se pueden separar por métodos físicos (destilación, filtración, decantación). Las propiedades de las mezclas no son definidas, sino que dependen de su composición. Dichas propiedades tienden a reflejar las sustancias que la componen; es decir, si la composición varía ligeramente, también lo hacen las propiedades.

Las mezclas pueden ser homogéneas o heterogéneas. En la mezclas homogéneas la composición es uniforme. A estas mezclas también se les llama soluciones. Son ejemplos de mezclas homogéneas, el acero, el aire dentro de una botella y el azúcar disuelto en agua. Las mezclas heterogéneas tienen una composición no uniforme o variable en su cuerpo (se pueden distinguir diferentes partes). Como ejemplos de mezclas heterogéneas tenemos el cemento, una roca, el suelo y la madera.

Las sustancias puras pueden ser elementos o compuestos. Un elemento es una sustancia formada por un solo tipo de átomos. Los elementos no se pueden separar en sustancias más simples por medios físicos o químicos. Hoy día se conocen unos 118 elementos, 83 de los cuales se encuentran en forma natural. Los elementos se representan mediante símbolos de una o dos letras. La primera letra es mayúscula y la segunda minúscula, en el caso de tener dos letras. Como ejemplos podemos mencionar el magnesio, Mg; oxígeno, O_2 y el mercurio, Hg.

Un compuesto es una sustancia formada por dos o más clases de elementos unidos químicamente en proporciones definidas. Los compuestos se representan por fórmulas, ejemplo: H_2SO_4, ácido sulfúrico; agua, H_2O y $C_{12}H_{22}O_{11}$. Los compuestos se pueden separar en sus componentes por medios químicos, por ejemplo, la electrólisis del agua, donde este compuesto se descompone en dos elementos hidrógeno y oxígeno. Desde el punto de vista químico, el agua no es un combustible, pero por el contrario sus dos componentes, el hidrógeno y el oxígeno reaccionan en forma explosiva al combinarse. Cualquier muestra de agua pura sin importar donde provenga tiene la misma composición y las mismas propiedades.

Hay millones de compuestos conocidos, y miles de compuestos nuevos se descubren o sintetizan cada año. A pesar de estas enormes cantidades, es posible que el químico conozca las propiedades de cada uno, ya que pueden clasificarse según su composición y estructura; por otra parte, los grupos de compuestos que se encuentran en cada clase tienen estructuras comunes.

ACTIVIDAD 3

Clasifica cada unas de las siguientes sustancias como: sustancia pura, mezcla homogénea, mezcla heterogénea, elemento o compuesto. Señale con un gancho a cuáles casillas corresponde.

Material **Acero**	Sustancia pura	Mezcla homo-génea	Mezcla Hetero-génea	Elemento	Compuesto
Leche					
Berilio					
Urea, $CO(NH_2)_2$					
Agua de mar					
Sangre					
Aire					
Clorato de Potasio					
Vidrio					
Ensalada de papas					
Bronce					
Alcohol					
Diamante					
Vapor de agua					
Gasolina y agua					
Vino					
Sal					
Hierro					
Papel					
Plástico					

Tarea 2

Define diez conceptos que has logrado aprender durante el desarrollo de este tema.

Propiedades físicas y químicas de la materia

Las propiedades son todas aquellas características o cualidades que identifican una sustancia.

Las sustancias se caracterizan por sus propiedades y por su composición. El color, punto de fusión y punto de ebullición son propiedades físicas. Una *propiedad física* se puede medir u observar sin que cambie la composición o identidad de la sustancia. Por ejemplo, se puede determinar el punto de fusión del hielo o calentar un trozo de él y registrar la temperatura a la cual se transforma en agua líquida. Pero el agua difiere del hielo sólo en apariencia y no en composición. Por lo tanto, el punto de fusión de una sustancia es una propiedad física.

Por otro lado para observar las *propiedades químicas* se debe efectuar un cambio químico. Esto quiere decir que la sustancia debe cambiar su composición e identidad. Por ejemplo: el gas hidrógeno reacciona violentamente en presencia del gas oxígeno para formar agua; después del cambio, la sustancia original, el hidrógeno habrá desaparecido y todo lo que quedará es una sustancia química distinta, el agua. No es posible recuperar el hidrógeno del agua por medio de un cambio físico.

Una sola propiedad no se puede utilizar para identificar una sustancia. Muchas sustancias reaccionan en forma similar con un reactivo determinado. Por ejemplo, los cloruros reaccionan con nitrato de plata produciendo un precipitado blanco. Con esta prueba no podríamos distinguir entre NaCl y KCl. Además, otras sustancias como el sulfato de sodio al reaccionar con nitrato de plata forman un precipitado blanco de $AgSO_4$. El químico debe realizar múltiples pruebas para poder identificar con toda certeza una sustancia desconocida.

ACTIVIDAD 4

Clasifica las siguientes propiedades según sean físicas o químicas; justifica tus respuestas.

Propiedad	Física	Química
a. El punto de ebullición del alcohol es de 78°C		
b. El cobre conduce la corriente eléctrica		
c. El azúcar cristalina es de color blanco		
d. Los aldehídos forman una oxima al reaccionar con hidracina.		
e. Los cloruros precipitan en presencia de iones plata.		
f. La densidad del agua es de 1,0 g/mL		

La materia puede experimentar cambios tanto en sus propiedades físicas como químicas.

En los *cambios físicos,* varían las propiedades físicas sin que la identidad (composición) de la sustancias cambie.
En los *cambios químicos* lo que varía es la identidad (composición) de las sustancias, es decir, que los cambios se originan en una reacción química.

ACTIVIDAD 5

Clasifica los siguientes cambios según corresponda, en cambios físicos o en cambios químicos:

- Una batería de linterna de mano pierde su carga: ________________
- La sal de mesa se disuelve en agua: ________________
- El hierro metálico se funde: ________________
- Un papel se quema al aire: ________________
- Una roca se parte en trozos: ________________
- El hierro con el oxígeno forman óxido de hierro: ________________
- La leche se agria: ________________
- El agua se evapora: ________________
- Los frutos maduran y se hacen más dulces: ________________
- El alcohol se inflama : ________________

NOTA: es importante no confundir entre propiedad y cambio. La propiedad es aquella característica que nos sirve para identificar una sustancia o grupo de sustancia. Un cambio se refiere a un proceso en el cual está involucrado una o más sustancias.

Las propiedades físicas pueden ser intensivas y extensivas.

Las *propiedades intensivas* no dependen de la cantidad de sustancia analizada. Ejemplo de propiedades intensivas: la densidad, el punto de fusión, el punto de ebullición, la conductividad eléctrica y la conductividad del térmica, dureza, brillo, sabor, olor, suavidad.

Las *propiedades extensivas* dependen de la cantidad de sustancia analizada; por ejemplo: volumen, peso, masa, tamaño.

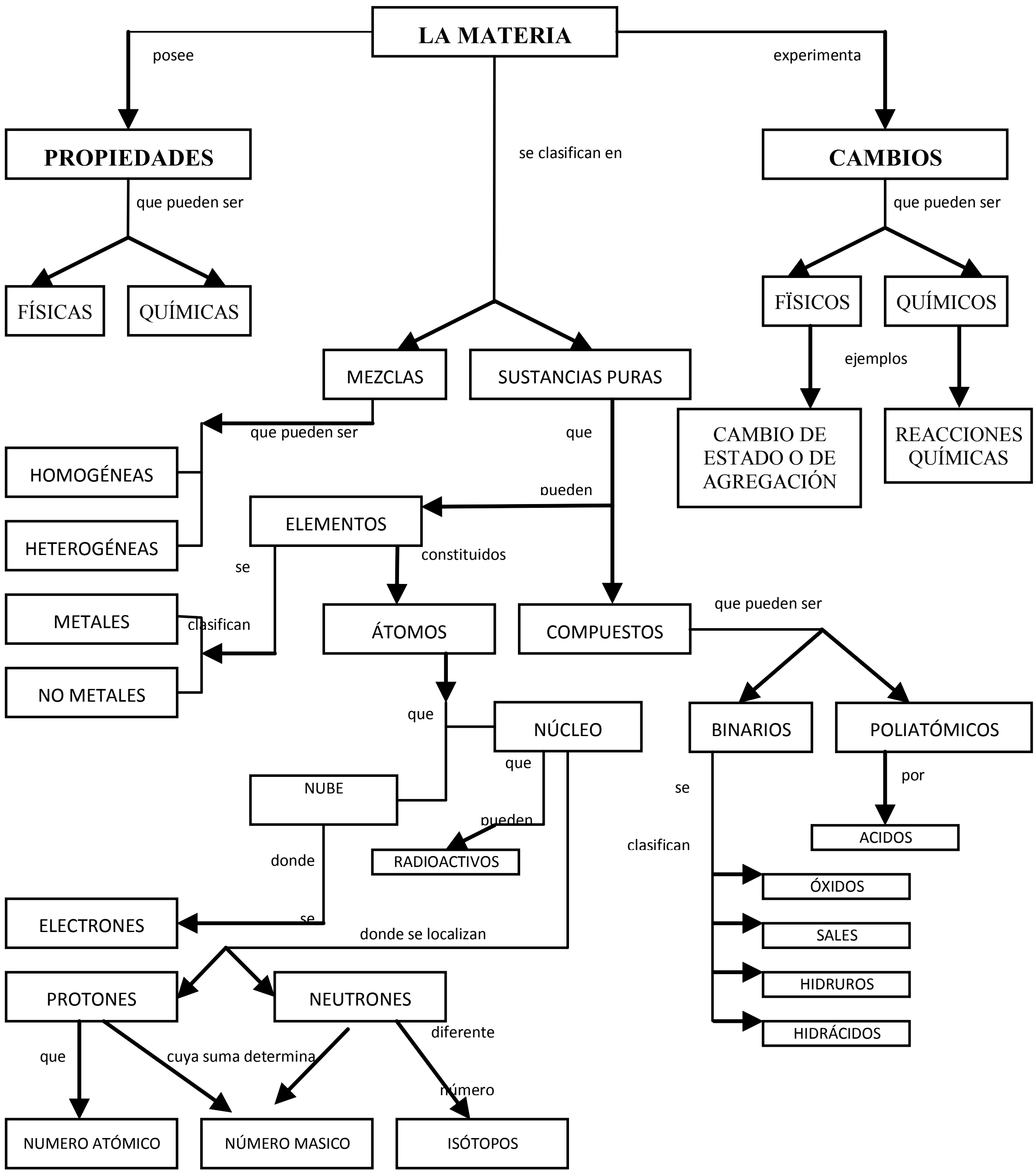
Tarea 3

Clasifica las siguientes propiedades físicas como intensiva o extensiva

La densidad del mercurio es 13,6g/mL	
El volumen del cilindro de cobre es de 20,0 mL	
El agua hierve a 100 °C	
El diamante es la sustancia más dura	
La masa del proyectil es de 400g	

ACTIVIDAD 6

Analiza el siguiente mapa conceptual. Trata de explicar con tus propias palabras todos los conceptos aprendidos utilizando el mapa conceptual como referencia.



UNIDAD 3. La estructura del átomo

Objetivos Específicos

- Describir la estructura general del átomo.
- Reconocer el significado físico de los números cuánticos.
- Enumerar las leyes ponderables de la materia.
- Representar la configuración electrónica de un átomo.

Presentación

Lee la unidad completa y subraya las ideas que consideres más importantes. Resuelve las actividades y tareas en orden secuencial. Luego de estudiar la unidad resuelve lo siguiente:

- Enuncia las leyes, pondéralas y relaciona estos enunciados con las leyes de Dalton.
- Represente la configuración electrónica del $_{20}Ca$.
- ¿Cuál es el significado físico de los números cuánticos n, l, m_l, n_s ?
- Escribe el conjunto de números cuánticos para todos los electrones del nivel 3 subnivel d.

Introducción

En el siglo V A. C., el filósofo griego Demócrito expresó la idea de que toda la materia estaba formada por partículas muy pequeñas e indivisibles que llamó *átomos* (que significaba indivisible o indestructible). Aunque esta idea no fue aceptada en su tiempo, la idea se mantuvo. En 1808, el científico inglés John Dalton, formuló su teoría atómica de la materia. Esta teoría se puede resumir en los siguientes postulados:

1. Los elementos están formados por partículas extremadamente pequeñas llamadas *átomos*. Todos los átomos de un mismo elemento son idénticos, tienen igual tamaño, masa y propiedades químicas. Los átomos de un elemento son diferentes a los átomos de todos los demás elementos.
2. Los compuestos están formados por átomos de más de un elemento. En cualquier compuesto, la relación del número de átomos entre dos de los elementos presentes siempre es un número entero o una fracción sencilla.
3. Una reacción química incluye sólo la separación, combinación o reordenamiento de los átomos; nunca se crean o se destruyen.

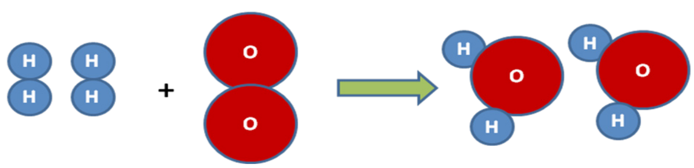
ACTIVIDAD 7

Discute la relación que existe entre los postulados de Dalton y las siguientes leyes:

- *Ley de las proporciones definidas*: muestras diferentes de un mismo compuesto siempre contienen los mismos elementos en la misma proporción de la masa (Ejemplo: el agua siempre contendrá dos átomos de hidrógeno por cada átomo de oxígeno, sin importar de donde se obtenga dicha muestra de agua).

- *Ley de las proporciones múltiples*: si dos elementos pueden combinarse para formar más de un compuesto, las masas de uno de los elementos que se combinan con una masa fija del otro, mantienen una relación de números enteros pequeños (Ejemplo: si tomamos igual cantidad de moléculas de CO y de CO_2, tenemos que la cantidad de átomos de carbono es igual, mientras que la relación entre los átomos de oxígeno es de 1:2).

- *Ley de conservación de la masa:* la materia no se crea ni se destruye, sólo se transforma (Ejemplo: en la reacción entre el oxígeno y el hidrógeno, 1 molécula de oxígeno (O_2) reacciona con 2 moléculas de hidrógeno (H_2) para formar 2 moléculas de agua (H_2O). La cantidad de átomos de oxígeno (2) e hidrógeno (4) se conservan en la reacción.



$$2\,H_2 + O_2 \longrightarrow 2\,H_2O$$

Mencione las contribuciones fundamentales de Demócrito y Lavoisier.

El desarrollo de una teoría

La teoría atómica de Dalton es un buen ejemplo de cómo se desarrollan las teorías. Una *teoría* es un modelo que explica en forma congruente las observaciones y los datos. Si la teoría es buena, podrá explicar en forma acertada los datos existentes, y será útil para responder las preguntas y hacer predicciones acerca de situaciones relacionadas. Además, una buena teoría es capaz de admitir ciertas modificaciones, de ser necesario, para tomar en cuenta nuevos hallazgos de investigación.

La teoría atómica de Dalton es una de este tipo. Ayudó a explicar cómo encajaban entre sí las "piezas del rompecabezas" (los datos disponibles). No se trataba de una teoría perfecta, pero era tan sencilla y profunda que las modificaciones menores no pudieron destruir las verdades fundamentales que explicaba.

La estructura del átomo

Una serie de investigaciones que empezaron alrededor de 1850 y que se extendieron hasta el siglo XX demostraron que los átomos tienen una estructura interna. Es decir, están formados por partículas aún más pequeñas, denominadas *partículas subatómicas*. Estas investigaciones condujeron al descubrimiento de tres partículas fundamentales: *electrones*, *protones* y *neutrones*.

El electrón

El físico inglés J.J. Thomson utilizó un tubo de rayos catódicos para descubrir la existencia de una partícula con carga negativa a las que llamó *electrón*. Thomson determinó la relación entre la carga eléctrica y la masa del electrón. El número que obtuvo es $-1{,}76x10^{8}$C/g donde C es la unidad de carga eléctrica, en *coulombs*. Más tarde R.A. Millikan llevó a cabo una serie de experimentos y encontró que la carga de un electrón es $-1.6x10^{19}$ C. A partir de estos resultados se determinó la masa de un electrón, $9{,}09x10^{-31}$Kg.

El protón y el núcleo

Desde principios de 1900 ya se conocían dos características de los átomos: contienen electrones y son eléctricamente neutros. Para que un átomo sea neutro debe contener el mismo número de cargas positivas y negativas. Thomson propuso que el átomo estaba constituido por una masa positiva la cual tenía incrustados los electrones, como si fuera un pastel de pasas.

Rutherford propuso que la mayor parte del átomo es espacio vacío y que las cargas positivas de los átomos estaban concentradas en un núcleo central.

Las partículas del núcleo que tienen carga positiva reciben el nombre de protones. En estos experimentos se encontró que los protones tienen la misma cantidad de carga que los electrones y que su masa es $1{,}67252x10^{-27}$ Kg.

El neutrón

Cuando en 1932 James Chadwick bombardeó una delgada lámina de berilio con partículas alfa, el metal emitió una radiación de muy alta energía, similar a los rayos gamma. Experimentos posteriores demostraron que estos rayos realmente conforman un tercer tipo de particulas sub-átomicas que se les denominó *neutrones* debido a que eran partículas eléctricamente neutras con una masa de $1{,}67495x10^{-27}$ Kg.

ACTIVIDAD 8

Complete el siguiente cuadro con la información correcta.

Partícula	**Masa** (Kg)	**Carga**	
		Coulombs	Unitaria
Electrón			
Protón			
Neutrón			

Tarea 4

Investiga acerca de otras partículas subatómicas además de las ya mencionadas: electrones, protones y neutrones.

Número atómico, número de masa e isótopos

Todos los átomos se pueden identificar por el número de protones y neutrones que contienen. El *número atómico* (Z) es el número de protones en el núcleo de cada átomo de un elemento. En un átomo neutro el número de protones es igual al número de electrones. La identidad química de un átomo queda determinada exclusivamente por su número atómico. Por ejemplo, el número atómico del nitrógeno es 7; esto quiere decir que todos los átomos de nitrógeno tienen 7 protones.

El *número de masa* **(***A***)** es el número total de protones y neutrones presentes en el núcleo de un átomo de un elemento.

Número de masa = número de protones + número de neutrones

No todos los átomos de un elemento dado tienen la misma masa. La mayoría de los elementos tienen dos o más isótopos, átomos que tienen el mismo número atómico, pero diferente número de masa. En otras palabras tienen diferente número de neutrones, pero igual número de protones.

La forma aceptada para denotar el número atómico y el número de masa de un átomo de un elemento X es como sigue:

$$^{\textit{número de masa}}_{\textit{número atómico}}\mathrm{X} \qquad ^{A}_{Z}\mathrm{X}$$

Así, para los isótopos de hidrógeno se escribe

$^{1}_{1}\mathrm{H}$	$^{2}_{1}\mathrm{H}$	$^{3}_{1}\mathrm{H}$
hidrógeno	deuterio	tritio

La propiedades químicas de un elemento están determinadas, fundamentalmente, por los protones y electrones de sus átomos.

En el caso de iones cargados, la carga se coloca en la parte superior derecha del símbolo. Ejemplo: $^{35}_{17}\mathrm{Cl}^{-1}$ y $^{122}_{50}\mathrm{Sn}^{4+}$. En el primer caso hay un exceso de 1 electrón respecto a los protones (18 electrones). En el segundo caso hay una deficiencia de 4 electrones respecto a los protones (46 electrones).

ACTIVIDAD 9

Indique el número de protones, neutrones y electrones de las siguientes especies:

Especie	Protones	Electrones	Neutrones
$^{16}_{8}\mathrm{O}$			
$^{199}_{80}\mathrm{Hg}^{2+}$			
$^{58}_{26}\mathrm{Fe}^{3+}$			
$^{35}_{17}\mathrm{Cl}^{-1}$			
$^{22}_{11}\mathrm{Na}$			
$^{20}_{10}\mathrm{Ne}$			

Estructura electrónica

En 1926, el físico austriaco Erwin Schödinger desarrolló una teoría para explicar el comportamiento de los electrones en un átomo. De acuerdo con esta teoría, existen cuatro números cuánticos que definen el comportamiento del electrón en el átomo.

El significado físico de estos números, así como los valores que pueden tomar, se describen de la siguiente manera:

- *Número cuántico principal* (*n*): Está relacionado con el nivel de energía del electrón. Los valores que puede tomar esta limitado a números enteros positivos mayor o igual a 1 y se denota por la letra *n*, donde *n* = 1, 2, 3,...

- *Número cuántico secundario* (*l*): Designa el subnivel de energía y la forma de la nube electrónica (orbital). Los posibles valores de *l* dependen de *n,* de modo que, para cada valor de *n*, el número cuántico *l* puede tomar los valores comprendidos entre 0 y *n*-1. Se acostumbra a simbolizar con letras los valores numéricos que pueden tomar el número cuántico 1, según:

s	p	d	f
0	1	2	3

  El número cuántico secundario, también nos informa sobre la geometría que tiene el orbital. Por ejemplo, un orbital s es esférico, un orbital p está formado por dos lóbulos, etc.

- *Número cuántico magnético* (m_1): Esta relacionado con la orientación del orbital en el espacio, o las orientaciones que presentan los orbitales de un mismo subnivel. Para cada valor de 1, el número cuántico magnético *m* puede tomar todos los valores enteros comprendidos entre +1 y –1. Así, si *l*=2, los valores posibles son +2, +1, 0, -1, -2.

- *Número cuántico de espin* (m_s) Teóricamente, un orbital puede albergar como máximo dos electrones. Dichos electrones se diferencian entre sí por el signo de la función de onda del espín. Cuando dos electrones ocupan el mismo orbital, los signos de la funciones de onda de espín son opuestos. El número cuántico m_s puede tomar sólo dos valores que son $+^1/_2$ y $-^1/_2$.

  El número cuántico de espín no se deriva de la ecuación de Schrödinger, sino que se introdujo para que la teoría fuera consistente con la experiencia. Como el electrón es una partícula cargada se comporta como un imán por lo cual se dice que tiene un espín o giro.

ACTIVIDAD 10

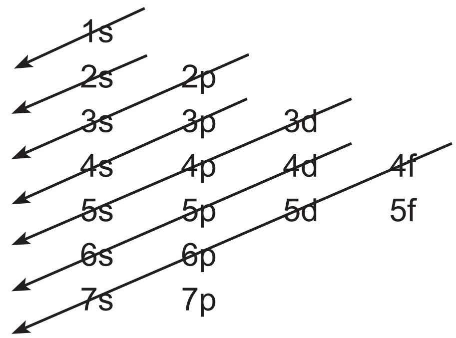
Indique los posibles valores de *n, l,* m_1 y m_s para todos los electrones del nivel 2. Repita el mismo procedimiento para los del nivel 3.

ACTIVIDAD 11

Encuentre los cuatro números cuánticos para el electrón diferenciante de las configuraciones $3p^5$, $4f^3$, $5d^8$, $2s^1$.

Configuración electrónica

Con el fin de distribuir los electrones dentro del átomo, se han establecido una serie de reglas básicas que responden a los principios de la teoría mecánico-cuántica y que permiten representar las configuraciones electrónicas de los átomos. Entendemos por *configuración electrónica* de un átomo a la distribución de los electrones en los diferentes orbitales atómicos.



- Los electrones se ubican en los orbitales de menor energía.
- Un orbital sólo puede tener como máximo dos electrones. Esto quiere decir que en su subnivel 1s caben como máximo 2 electrones, en un *p* 6, en un *d* 10 y en un orbital f 14.
- Cuando un subnivel tiene más de un orbital, los electrones van ocupando este subnivel, de forma que cada electrón adicional se ubica en orbitales diferentes con el mismo *espin*. Esta condición se llama *Regla de Hund* y establece que el orden en el cual los electrones ocupan un subnivel es aquel que presente un mayor número de espines paralelos, o la combinación con el mayor número de electrones desapareados.

Una forma sencilla para determinar el orden correcto de llenado de los orbitales se puede ilustrar con el siguiente diagrama mnemónico:

El orden de llenado es 1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 4s, 3d, 4p, 5s, 4d, 5p, 6s, ... Por ejemplo, para el sodio, con número atómico (NA)= 11, y la configuración electrónica es: $1s^2$, $2s^2$, $2p^6$, $3s^1$; y para el hierro, con (NA)= 26, la configuración es: $1s^2$, $2s^2$, $2p^6$, $3s^2$, $3p^6$, $4s^2$, $3d^6$.

ACTIVIDAD 12

Desarrolle la configuración electrónica de los siguientes elementos:

Co	S
Ni	Na
U	Hg
Cd	Ne
Ba	Li
Rn	B

UNIDAD 4. La tabla periódica

Objetivos específicos

- Describir la organización general de la tabla periódica.
- Enumerar las propiedades de los elementos en función de la periodicidad.
- Definir el concepto de enlace químico.
- Diferenciar entre diferentes tipos de enlaces químicos.
- Reconocer la diferencia entre valencia y oxidación.

Presentación

Lee toda la unidad y subraya las ideas más importantes. Desarrolla las actividades y tareas en orden secuencial. Luego de estudiar la unidad resuelve lo siguiente:

- Enumera tres elementos de cada tipo: alcalinos, alcalino térreos, térreos, halógenos y gases nobles.
- Utilizando las tablas periódicas da el nombre de dos elementos muy electropositivos y dos elementos electronegativos.
- Relacione el número de grupo con los electrones de valencia del Mg, Na, Cl,y N.
- Prediga el tipo de enlace presente en H_2O, NaC1, C_2H_5OH, HF, Na_3PO_4, H_2SO_4 (nota: de acuerdo con la complejidad del compuesto, deberás enumerar más de un tipo de enlace). Por ejemplo: Mg SO_4 : iónico entre el Mg y el anión sulfato. Covalente entre azufre y el oxígeno dentro del anión Sulfato.

La tabla periódica moderna

En el presente siglo se descubrió que las propiedades de los elementos no son función periódica de los pesos atómicos, sino que varían periódicamente con sus números atómicos o carga nuclear. He aquí la verdadera Ley periódica moderna por la cual se rige el nuevo sistema: "*Las propiedades de los elementos son función periódica de sus números atómicos*".

Modernamente, el sistema periódico se representa alargándolo en sentido horizontal lo suficiente para que los períodos de 18 elementos formen una sola serie. Con ello, desaparecen las perturbaciones producidas por los grupos secundarios. El sistema periódico largo es el más aceptado; la clasificación de Werner, permite apreciar con más facilidad la periodicidad de las propiedades de los elementos.

La estructura de la tabla periódica está definida por la configuración electrónica de los átomos de los diferentes elementos. El único nivel electrónico de una distribución electrónica de un átomo, señala el período de la tabla. El número de electrones de ese nivel determina el grupo de la tabla. El tipo de orbital en el cual se encuentra el electrón diferenciante define el bloque al cual pertenece el elemento: S, P, D o F.

Como ejemplo veamos la siguiente configuración $1s^2\ 2s^2\ 2p^5$. El último nivel ocupado es el dos, en el último nivel hay siete electrones. Es decir que el elemento al cual pertenece esta distribución está localizado en el periodo 2, en el grupo 7 y el bloque P. Lo anterior sólo es válido para los elementos cuya configuración termina en s o p. A estos elementos de los bloques S y P se les llama *representativos*.

A los elementos del bloque D se les denomina *elementos de transición* ya que se ocupan subniveles cuyo número cuántico principal es una unidad menor que el número del período, por ejemplo 3d en el cuarto periodo. Por otra parte, el nivel cuántico que ocupa el electrón diferenciante de los elementos del bloque F es dos unidades menor que el período al cual pertenece, por ejemplo 4f en el sexto periodo.

Clasificación de la tabla periódica

La tabla periódica consta de siete períodos y ocho grupos.

Periodos: Cada fila horizontal.
Grupo: Cada columna vertical.

Familia: Grupo de elementos que tienen propiedades semejantes.

ACTIVIDAD 13

- Investiga los aportes de Mendeleiev.
- Indica el grupo, período y bloque al cual pertenecen cada uno de los siguientes elementos, utilizando una tabla periódica actualizada.

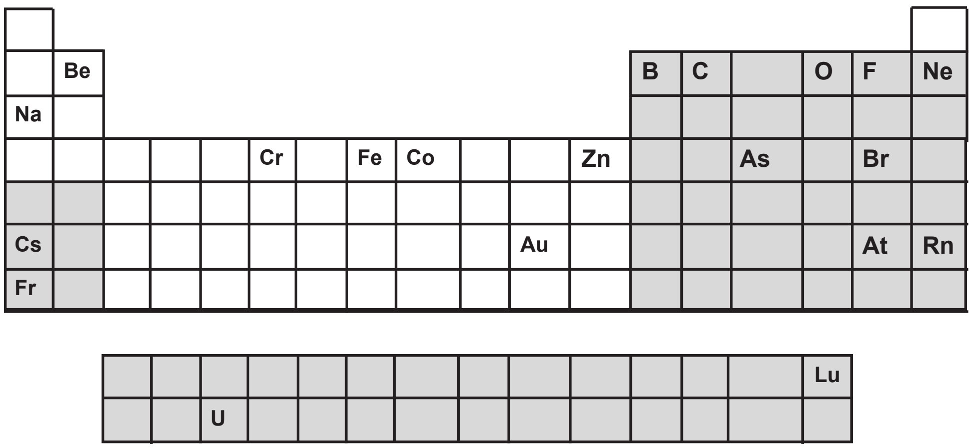
Elemento	Configuración	Grupo	Periodo	Bloque
Na				
S				
Ne				
Ca				
Al				

Algunos grupos de la tabla periódica se le han dado nombres específicos que se originaron a través del desarrollo de esta. A saber:

Grupo IA: Alcalinos	*Grupo IIIA:* Térreos	*Grupo VIIIA:* Gases nobles
Grupo IIA: Alcalinotérreos	*Grupo VIIA:* Halógenos	

ACTIVIDAD 14

Encuentra en el siguiente esqueleto de la tabla periódica lo siguiente y escribe en la línea el símbolo que le corresponda.



- Un halógeno ______
- Un gas noble ______
- Todos los metaloides __________
- Dos elementos representantivos __________
- Tres elementos que están en el mismo periodo _____________
- Un metal alcalino _____________
- Los metales alcalinotérreos __________
- Dos elementos del bloque F __________
- Tres elementos del bloque P __________
- Los elementos del bloque S __________
- Los elementos del bloque D __________

Propiedades periódicas y no periódicas de los elementos químicos

Son *propiedades periódicas* de los elementos químicos las que se desprenden de los electrones de cadena de valencia o electrones del nivel más externo así como la mayor parte de las propiedades físicas y químicas.

Radio atómico

Es la distancia de los electrones más externos al núcleo. Esta distancia se mide en Angström ($A=10^{-10}m$), dentro de un grupo sistema periódico, a medida que aumenta el número atómico de los miembros de una familia aumenta la densidad, ya que la masa atómica crece más que el volumen atómico, el color F (gas amarillo verdoso), Cl (gas verde), Br (líquido rojo), I sólido (negro púrpura), el lumen y el radio atómico, el carácter metálico, el radio iónico; aunque el radio iónico de los elementos metálicos es menor que su radio atómico.

Energía de ionización

Es la energía mínima que se requiere para arrancar un electrón de un átomo en estado gaseoso, en su estado fundamental. La magnitud de la energía de ionización es la medida de qué tan fuertemente está unido el electrón al átomo. Cuanto mayor es la energía de ionización es más difícil quitar el electrón. En la tabla periódica, la energía de ionización aumenta de izquierda a derecha y disminuye de arriba hacia abajo.

Afinidad electrónica

La *electroafinidad* es el cambio de energía cuando un átomo en estado gaseoso, acepta un electrón para formar un *anión*. En la tabla periódica, la afinidad electrónica disminuye al aumentar el número atómico de los miembros de una familia.

Electronegatividad

La *electronegatividad* es la tendencia de un átomo a captar electrones. En una familia la electronegatividad disminuye con el número atómico y en un período aumenta con el número atómico.

ACTIVIDAD 15

Coloque los elementos Cl, F, Br en orden creciente de:

- Radio atómico: ____________
- Electronegatividad: ____________
- Afinidad electrónica: ____________
- Energía de ionización:____________

Coloque los elementos Na, Li y Ka en orden creciente de:

- Radio atómico: ____________
- Electronegatividad: ____________
- Afinidad electrónica: ____________
- Energía de ionización:____________

Enlaces químicos

Iones

Los átomos están constituidos por el núcleo y las capas de electrones. El número de cargas positivas del primero es igual al número de electrones. Si el átomo neutro pierde o gana electrones se forman los llamados *iones*.

Los *iones* son átomos o grupos atómicos que tienen un número de electrones excesivo o deficiente para compensar la carga positiva del o los núcleos.

En el primer caso los iones que tienen carga negativa reciben el nombre de *aniones*, y en el segundo los deficientes en electrones, están cargados positivamente y se llaman *cationes*.

Elementos electropositivos y electronegativos

Se llaman *elementos electropositivos* aquellos que tienen tendencia a perder electrones transformándose en cationes; a ese grupo pertenecen los metales.

Elementos electronegativos son los que toman con facilidad electrones transformándose en aniones; a este grupo pertenecen los *metaloides*.

Los elementos más electropositivos están situados en la parte izquierda del sistema periódico; son los llamados elementos *alcalinos*. A medida que se avanza en cada período hacia la derecha va disminuyendo el carácter electropositivo, hasta llegar, finalmente, a los *halógenos* de fuerte carácter electronegativo.

Electrones de valencia

La unión entre los átomos se realiza mediante los electrones de la última capa exterior, que reciben el nombre de *electrones de valencia*. La unión consiste en que uno o más electrones de valencia de algunos de los átomos se introduce en la esfera electrónica del otro.

Los gases nobles, poseen ocho electrones en su última capa, salvo el helio que tiene dos. Esta configuración electrónica les comunica inactividad química y una gran estabilidad.

Todos los átomos tienen tendencia a transformar su sistema electrónico y adquirir el que poseen los gases nobles, porque su estructura es la más estable.

Valencia electroquímica

Se le llama *valencia electroquímica* al número de electrones que ha perdido o ganado un átomo para transformarse en ion. Si dicho número de electrones perdidos o ganados es 1, 2, 3, etc. Se dice que el ion es *monovalente*, *bivalente*, *trivalente*, respectivamente.

Tipos de enlace

En la unión o enlace de los átomos pueden presentarse los siguientes casos:

1. *Enlace iónico*, si hay atracción electrostática.
2. *Enlace covalente*, si comparten los electrones.
3. *Enlace covalente coordinado*, cuando el par de electrones es

aportado solamente por uno de ellos.

4. *Enlace metálico*, los elementos de valencia pertenecen en común a todos los átomos.

Enlace iónico o electrovalente

Fue propuesto por W. Kossel en 1916 y se basa en la transferencia de electrones de un átomo a otro. La definición es la siguiente: "*Electrovalencia es la capacidad que tienen los átomos para ceder o captar electrones hasta adquirir una configuración estable, formándose así combinaciones donde aparecen dos iones opuestos*".

Exceptuando solamente los gases nobles, todos los elementos al combinarse tienden a adquirir la misma estructura electrónica que el gas noble más cercano. El átomo que cede electrones se transforma en ion positivo (*catión*), en tanto que el que gana origina el ion negativo (*anión*).

Propiedades generales de los compuestos iónicos

En general, los compuestos con enlace iónico presentan puntos de ebullición y fusión muy altos, pues para separarlos en moléculas hay que deshacer todo el edificio cristalino, el cual presenta una elevada energía reticular.

Enlace covalente normal

Se define de la siguiente manera: *"Es el enlace mediante el cual dos átomos se unen compartiendo una o varias parejas de electrones; por tanto, no pierden ni ganan electrones, sino que los comparten"*.

Un átomo puede completar su capa externa compartiendo electrones con otro átomo.

Cada par de electrones comunes a dos átomos se llama *doblete electrónico*. Esta clase de enlace químico se llama *covalente*, y se encuentra en todas las moléculas constituidas por elementos no metálicos, combinaciones binarias que estos elementos forman entre sí, tales como hidruros gaseosos y en la mayoría de compuestos del carbono.

Cada doblete de electrones (representados por el signo **:**) intercalado entre los símbolos de los átomos, indica un enlace covalente sencillo y equivalente al guión (−) de las fórmulas estructurales.

El enlace covalente puede ser: *sencillo, doble o triple*, según se compartan uno, dos o tres pares de electrones.

La diferencia en electronegatividad entre los átomos que se combinan va a definir el tipo de enlace que se forma. Si esta diferencia es mayor de 1,7 se considera que el enlace es iónico. Si la diferencia está entre 0,5 y 1,7 el enlace se considera *covalente polar*, y menor de 0,5 es *no polar*.

La característica polar o no polar del compuesto covalente formado va a depender además, de la geometría de la molécula. En algunas moléculas simétricas, los momentos dipolares se anulan y el compuesto tiene un carácter no polar.

ACTIVIDAD 16

Indique en cada casilla el tipo de enlace que se formará al combinar los elementos de la columna y fila correspondiente.

Elemento	F	O	B	Br	P
Na					
Al					
H					
Ba					
Fe					

Enlace covalente coordinado

Se define al *enlace covalente* o *coordinado* al "*enlace que se produce cuando dos átomos comparten una pareja de electrones, pero dicha pareja procede solamente de uno de los átomos combinados*".

El átomo que aporta la pareja de electrones recibe el nombre de *donante*, y el que los recibe, *aceptor*. Cuando queremos simplificar la fórmula electrónica se pone una flecha que va

del donante al aceptor.

Enlace metálico

La estructura cristalina de los metales y aleaciones explica bastante una de sus propiedades físicas.

La red cristalina de los metales está formada por átomos (red atómica) que ocupan los nudos de la red en forma muy compacta con otros.

En la mayoría de los casos, los átomos se ordenan en red cúbica, retenido por fuerzas provenientes de los electrones de valencia; pero los electrones de valencia no están muy sujetos, sino que forman una nube electrónica que se mueve con facilidad cuando es impulsada con la acción de un campo eléctrico.

UNIDAD 5. El concepto de Mol. Estequiometría.

Objetivos específicos

- Relacionar el concepto de mol con el número de Avogadro.
- Relacionar el concepto de mol, con el concepto de masa y volumen molares.
- Definir el concepto de estequiometría.
- Aplicar relaciones estequiométricas a los reactivos y productos de una relación química.

Presentación

Lee toda la unidad, subrayando ideas importantes. Resuelve las actividades en orden secuencial.

Elabora un mapa conceptual que se inicie con la estequiometría y que relacione los conceptos del módulo hasta llegar al número de Avogadro.

Calcula la cantidad de moléculas de H_2O que hay en 15g de vapor de H_2O

Cuando la materia orgánica sufre combustión se produce CO_2 más H_2O. Suponiendo que se quema un mol de glucosa $C_6H_{12}O_6$ en presencia de oxígeno:

a) Escriba la ecuación balanceada.
b) Calcule los g de CO_2 que se producen a partir de 1 mol de glucosa.
c) Si en vez de 1 mol de glucosa, reaccionan 8.0g, calcule los mL de CO_2 producido a TPN.

Introducción

La unidad empleada para expresar la cantidad de materia formada por átomos, moléculas o iones, es el mol.

El *mol* se define como la cantidad de sustancia que contienen $6{,}02 \times 10^{23}$ partículas. A este número se le conoce como *Número de Avogadro*, en honor a Amadeo Avogadro, pues el estableció que volúmenes iguales de diferentes gases en las mismas condiciones de temperatura y presión tienen igual número de moléculas.

Así como la docena tiene doce unidades, un mol es la cantidad de sustancia que contiene $6{,}02 \times 10^{23}$, de entidades elementales que pueden ser átomo, moléculas o iones u otras partículas.

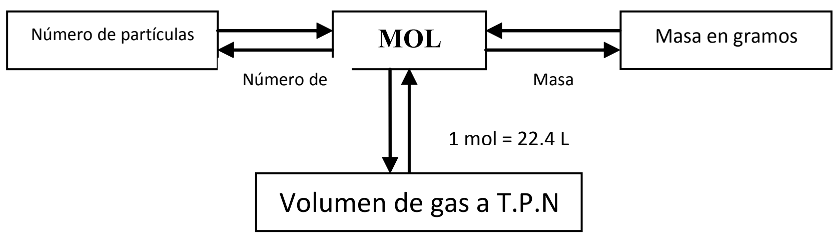
En otras palabras mol es la cantidad de sustancia que contiene un número de partículas igual al número de Avogadro. La masa molar es la cantidad de gramos correspondiente a un mol de sustancia. En el caso de los elementos monoatómicos, el mol corresponde a su peso atómico, por ejemplo un mol de sodio (PA=23) corresponde a 23 g de sodio. Para compuestos, un mol corresponde a su masa molar, por ejemplo, en el caso del agua (PM = 18) un mol es igual a 18 g de agua.

ACTIVIDAD 17

Encuentre la masa correspondiente a un mol de las siguientes sustancias:

Sustancia	**Masa molar** (g)
Hierro	
NaCl	
CH_4	
O_2	
Azufre	

La masa molar se puede utilizar para convertir de masa a moles y viceversa y el número de Avogadro para transformar de mol a número de partículas y viceversa. En el siguiente diagrama, se muestra la secuencia que debe asegurarse para realizar estas conversiones.



El número de moles de una sustancia se puede calcular en función:

- del volumen de un gas a $TPN = \frac{V(litros)}{22.4}$
- del volumen de un gas en condiciones no normales. $n = \frac{PV}{RT}$
- de la masa; $moles = \frac{g(sustancia)}{(M\ mol)}$

Por ejemplo: ¿Cuántas moléculas de O_2 hay en 8,0 g de O_2?

Solución:

$$8.0g\ O_2 \times \frac{1mol\ O_2}{32g\ O_2} \times \frac{6.023 \times 10^{23} \text{moléculas}}{1mol\ O_2} = 1.05 \times 10^{23} \text{moléculas}$$

ACTIVIDAD 18

Realice las siguientes conversiones:

a. 5.0 g de Fe a moles de Fe:
=

b. 4,0 moles de CH_4 a gramos de CH_4
=

c. 1,3 x 10^{24} moléculas de agua a g de agua =

d. 6,8 g de Na a átomos de sodio
=

e. 8,4 g de H_2 a L de hidrógeno
=

f. 46,5 L de He a átomos de helio
=

Estequiometría. Cálculo a partir de las ecuaciones químicas

Una ecuación química contiene abundante información acerca de las cantidades de reactivos y productos que participan en el proceso. Las ecuaciones químicas pueden interpretarse en términos de átomos y moléculas, o bien en términos de gramos, moles y litros. Por ejemplo, de acuerdo con la ecuación química que describe la combustión del butano.

$$2\ C_4H_{10} + 13\ O_2 \rightarrow 8\ CO_2 + 10\ H_2O$$

se puede afirmar que dos moléculas de butano se combinan con 13 moléculas de oxígeno para formar ocho moléculas de dióxido de carbono y 10 moléculas de agua. También podemos decir que dos moles de butano se combinan con 13 moles de oxígeno para formar ocho moles de dióxido de carbono y 10 moles de agua.

Una ecuación química balanceada, contiene la información necesaria para predecir cuál será la cantidad de reactivo que se necesita para preparar una cierta cantidad de producto, o bien, cuánto producto se obtiene a partir de cierta cantidad de reactivo.

De la ecuación química ajustada, correspondiente a una reacción química, se pueden establecer relaciones entre las cantidades de dos sustancias cualesquiera que intervienen en la reacción, y calcular a partir de dicha relación, la cantidad de una sustancia si se conoce la otra. Estos cálculos reciben el nombre de *cálculos estequiométricos*.

Relaciones estequiométricas entre reactivos y productos

Estas relaciones entre las diferentes especies que participan en la reacción se pueden establecer a manera de igualdades que se pueden utilizar como fraccionarios unitarios. Estas relaciones se llaman *relaciones estequiométricas*, y los fraccionarios en este caso se llaman *factores de conversión*.

Como por ejemplo, tomemos la ecuación

$$CH_4 + 2\ O_2 \rightarrow CO_2 + 2\ H_2O$$

Se pueden establecer las siguientes igualdades y factores de conversión:

En términos de mol a mol:

1 mol CH_4 = 2 mol O_2 (1 mol CH_4 / 2 mol O_2) o (2 mol O_2 / 1 mol CH_4)

1 mol CH_4 = 1 mol CO_2 (1 mol CH_4 / 1 mol CO_2) o (1 mol CO_2 / 1 mol CH_4)

En términos de mol a gramos:

1 mol CH_4 = 16 g de CH_4 (1 mol CH_4 / 16 g CH_4) o (16 g CH_4 / 1 mol CH_4)

Para realizar las diferentes conversiones entre las especies que participan en la reacción podemos guiarnos por el Esquema A que indica la secuencia que debemos realizar para llevar a cabo dicha transformaciones. Por ejemplo, en base a la reacción de combustión del metano, contestar las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos gramos se forman de CO_2 al reaccionar 8,0 g de CH_4 con suficiente oxígeno?

Según la ecuación 1 mol de metano produce 1 mol de dióxido de carbono. Esta relación la podemos utilizar para transformar de moles de metano a moles de dióxido de carbono. Inicialmente, utilizando el concepto de mol transformamos gramos de CH_4 a moles de CH_4 con la masa molar del metano; luego, de moles de metano a moles de CO_2 con los coeficientes de balance, y finalmente de moles de dióxido de carbono a gramos de dióxido de carbono con la masa molar.

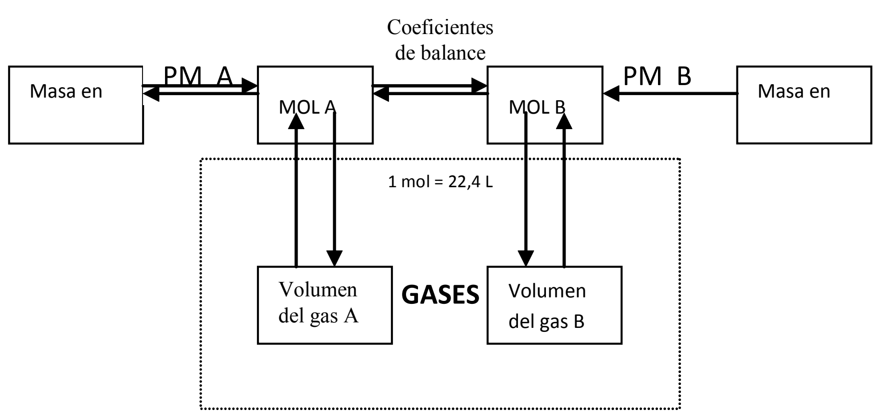
$$8{,}0 g\ CH_4 x \frac{(1\,mol\ CH_4)}{(16\,g\ CH_4)} x \frac{(1\,mol\ CO_2)}{(1\,mol\ CH_4)} x \frac{(44 g\ CO_2)}{(1\,mol\ CO_2)} = 22 g\ O\ _2$$

2. ¿Cuántos litros de O_2 a TPN se necesitan para producir 88g de CO_2?

Según la ecuación dos moles de O_2 producen un mol de CO_2 . Inicialmente transformamos gramos de CO_2 a moles con la masa molar; luego, moles de CO_2 a moles de O_2 con los coeficientes de balance y finalmente moles de oxígeno a litros de O_2 a TPN.

$$\mathbf{88}\ g\ CO_2 x \frac{(1\ mol\ CO_2)}{(44\,g\ CO_2)} x \frac{(2\,mol\ O_2)}{(1\,mol\ CO_2)} x \frac{(\ 2{,}4\text{L de } O_2)}{(1\,mol\ O_2)} = \quad 4{,}8\text{L de } O_2 \text{ TPN}$$

ESQUEMA A



ACTIVIDAD 19

Resuelva los siguientes problemas (haga el balance antes de resolver los problemas)

a) Dada la ecuación : $N_2 + H_2 \rightarrow NH_3$ ¿Cuántos gramos de amonio se producen al reaccionar 7g de nitrógeno con suficiente H_2? ¿Cuántos litros de H_2 se necesitan para producir 60 L de NH_3?

b) Cuando el benceno se quema produce dióxido de carbono y agua. ¿Qué volumen de oxígeno se necesita para consumir 7.8 g de benceno?

c) Al reaccionar el cloruro de sodio con nitrato de plata, se produce un precipitado de cloruro de plata y queda el nitrato de sodio en forma acuosa. ¿Qué cantidad en gramos de cloruro de sodio se necesita para producir 2,0 g de AgCl?

Tarea 5

Investigue sobre las reacciones que se utilizan a nivel industrial para producir: Amoniaco, Ácido sulfúrico, Alcohol etílico, PVC (Cloro de polivinilo)

Respuestas a algunas actividades

Actividad 12

$_{27}CO = 1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 4s^2\ 3d^7 \approx Ar\ 3d^8\ 4s^2$

$_{16}S = 1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^4 \approx Ne\ 3s^2\ 3p^4$

$_{28}Ni \approx Ar\ 3d^8\ 4s^2$

$_{92}U \approx Rn\ 5f^3\ 6d^1\ 7s^2$

$_{48}Cd \approx Kr\ 4d^{10}\ 5s^2$

$_{80}Hg \approx Xe\ 4f^{14}\ 5d^{10}\ 6s^2$

$_{56}Ba \approx Xe\ 6s_2$

$_{3}Li \approx 1s^2\ 2s^1$

$_{10}Ne \approx 1s^2\ 2s^2\ 2p^6$

Actividad 14

Un metal alcalino: **Na** Un gas noble: **Rn**
Un halógeno: **Br** Metaloides: **B, As**
Todos los metaloides : **B, As**
Dos elementos representativos: **Na, O**
Tres elementos que estén en el mismo periodo: **Cr,Co, As**
Metales alcalinotérreos: **Be**
Dos elementos del bloque F: **U, Lu**
Tres elementos del bloque P: **B, As, At**
Los elementos del bloque S: **Fr, Be, Cs, Na**
Los elementos del bloque D: **Cr, Co, Fe, Zn, Au**

Actividad 15

Radio atómico: F, C, Br y el otro grupo Li, Na, K

Electronegatividad: Br, C, F y el otro grupo K, Na, Li

Afinidad electrón: Br, C, F y el otro grupo K, Na, Li

Energía de ionización: Br, C, F y el otro grupo K, Na, Li

Actividad 16

Elemento	F	O	B	Br	P
Na	Iónico	Iónico	Cov. P.	Iónico	Cov. no P.
Al	Iónico	Iónico	Cov. no P.		Cov. no P.
H	Cov. P.	Cov. P.	Cov. no P.	Cov. no P	Cov. no P.
Ba	Iónico				
Fe	Iónico				Cov. no P.

Actividad 17

Hierro, 56 g. NaCl, 58.5 g. CH_4, 16 g. O_2, 32 g. Azufre, 32 g.

Actividad 18

a) $8,95 \times 10^{-2}$ mol Fe	b) 64 g CH_4	c) 38,85 g H_2O
e) 94,08 litros	f) $1,25 \times 10^{24}$ átomos He	

Actividad 19

a) 8,5 g NH_3 y 90 L H_2

b) 16,8 L O_2

Bibliografía

ALLIER Rosalía. 1995. **La magia de la química**. Ediciones Pedagógicas. México.

BROWN T., Le May H. Burstein B. 1998. **Química. La Ciencia Central**. Séptima Edición. Prentice Hall. Hispanoamericana, México.

BURNS, Ralph. 1996. **Fundamentos de Química**, Segunda Edición, Prentice Hall Hispanoamérica. México.

GARRITZ A. 1998. **Química**. Addison Wesley Longman. Primera Reimpresión. México.

MARTÍN, Rafael. 1998. **Las reacciones químicas.** McGraw Hill. España.

MÓDULO INSTRUCCIONAL

ÁREA DE CIENCIAS

FÍSICA

DOCUMENTO ELABORADO POR:

DRA. OMAIRA PÉREZ

COLABORACIÓN DEL:

PROF. PABLO MARTÍN WEIGANDT B.

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

2013

Universidad Autónoma de Chiriquí

Ciudad Universitaria, David,
Chiriquí, República de Panamá
admision@unachi.ac.pa
Tel.:(507) 775-3485
Fax: (507) 774-2679
www.unaci.ac.pa

AUTORIDADES
Magíster Etelvina de Bonagas
Rectora
Magíster José Coronel
Vicerrector Académico
Doctor Roger Sánchez
Vicerrector de Investigación y Posgrado
Magíster Rosa Moreno
Vicerrectora Administrativa
Doctor Mario Luis Pittí
Secretario General
M.Sc. Pedro Caballero
Decano de la Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
M. Sc. Yusbielda Torres
Dirección de Admisión

FICHA TÉCNICA
11 pulgadas
77 páginas
El contenido académico de este módulo, esta bajo la
responsabilidad de los especialistas de la Facultad.

Publicado por la Dirección de Admisión, 2013

Índice general

1

Mediciones y herramientas matemáticas para la Física

En esta sección los temas por desarrollar son tres: mediciones, gráficas y vectores. El estudio, comprensión y análisis de éstos nos lleva a expresarte los objetivos que esperamos logres al finalizar:

1. Conocer los aspectos fundamentales de la medición en Física.

2. Diferenciar entre medición directa y medición indirecta

3. Conocer los aspectos fundamentales de conceptos como valor promedio, desviación de la medición y desviación estándar.

4. Conocer cómo se presentan los resultados de una medición en Física.

5. Dominar los conceptos de cifras significativas, notación científica y orden de magnitud.

6. Identificar los aspectos fundamentales de las operaciones aritméticas ordinarias tanto con cifras significativas como con números escritos en notación científica.

7. Identificar las características fundamentales de la proporción directa, función lineal, potencial y exponencial.

8. Calcular la pendiente de un gráfico representado en papel milimetrado, papel semi logarítmico o doblemente logarítmico.

9. Obtener la ecuación asociada a un gráfico.

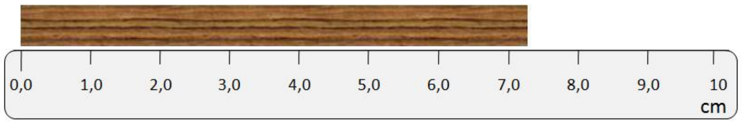


Figura 1.1: Medición directa de un objeto con una regla graduada en centímetros.

1.1. Concepto de medición directa y concepto de cifras significativas

La medición es la comparación entre la magnitud $\boldsymbol{M}$ que se desea ***medir*** con un ***patrón*** o ***magnitud patrón***. Veamos, rápidamente, los aspectos fundamentales del proceso de medición.

Al analizar la comparación que se hace en la Figura 1.1, entre el largo del objeto por medir y el patrón de medición (la regla), concluimos que: el largo del objeto es alrededor de siete centímetros completos (7 cm) y un poco más o una fracción más del centímetro justo después del centímetro número siete. La fracción sobrante del instrumento de medición se encuentra localizada, específicamente, entre el ***centímetro 7*** y el centímetro 7 más la mitad del centímetro siguiente $(7 + 0,5)$. Entonces, podemos aproximar el resultado de la medición: $7,\ 3$ cm. Pero, dudamos del tres (3), pues, pudo haber sido dos (2).

Ante lo precedente debemos tener presente que:

1. El resultado obtenido de la medición realizada ***es producto de la comparación directa de la magnitud física que nos interesa, con el patrón de medición***. Hemos realizado una medición directa.

2. Los números, productos de una medición, se conocen como ***cifras significativas*** y están constituidas por ***una o más cifras seguras o ciertas*** y ***una cifra dudosa, estimada o incierta***.

3. El resultado de la medición, en función de las cifras significativas y el instrumento de medición utilizado, nos dice que: el siete (7) es una cifra segura (cifra que se obtuvo directamente del instrumento) y el tres (3) es la cifra dudosa (cifra que no sale del instrumento de medición), pues, tuvimos que estimarla. En consecuencia, el resultado de la medición tiene un total de dos cifras significativas.

En esta ocasión, en la figura 1.2, presentamos el mismo objeto; pero, ahora el instrumento de medición es una regla graduada en milímetros. El resultado de la medición es $7,\ 20$ cm.

¿Cómo obtuvimos ese resultado? Al comparar la longitud del objeto con la regla, obtenemos directamente del instrumento el siete (7) y el dos (2) y ambos

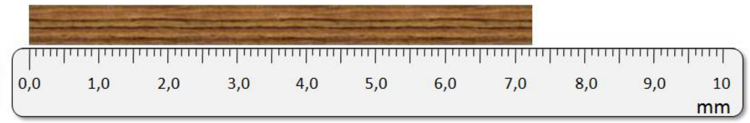


Figura 1.2: Medición directa de un objeto con una regla graduada en milímetros.

constituyen el conjunto de cifras seguras. En cuanto a la cifra dudosa, es ***cero***. Ello se debe a que, el final de la longitud del objeto que se mide, quedó antes de la mitad del próximo milímetro, específicamente, antes de la mitad entre los milímetros 2 y 3 (o los milímetros siguientes). En el caso en que el final de la longitud del objeto que se mide, quede en la mitad o después de la mitad entre los milímetros 2 y 3 (o los milímetros siguientes), tenemos que la cifra dudosa será cinco (5).

1.1.1. Actividad 1.1

Determinar la longitud de los objetos mostrados en la figura 1.3.

1. La longitud − 1 mide ____________, tiene ________ cifras significativas. Donde ____ son las cifras ciertas y el ________ es la cifra dudosa.

2. La longitud − 2 mide ____________, tiene ________ cifras significativas. Donde ____ son las cifras ciertas y el ________ es la cifra dudosa.

3. La longitud − 3 mide ____________, tiene ________ cifras significativas. Donde ____ son las cifras ciertas y el ________ es la cifra dudosa.

4. La longitud − 4 mide ____________, tiene ________ cifras significativas. Donde ____ son las cifras ciertas y el ________ es la cifra dudosa.

5. La longitud − 5 mide ____________, tiene ________ cifras significativas. Donde ____ son las cifras ciertas y el ________ es la cifra dudosa.

1.2. El valor más próximo al valor verdadero de la magnitud física en medición

El físico (el científico), sabe que no puede obtener un resultado igual al valor verdadero debido a que las actividades son finitas y los recursos del

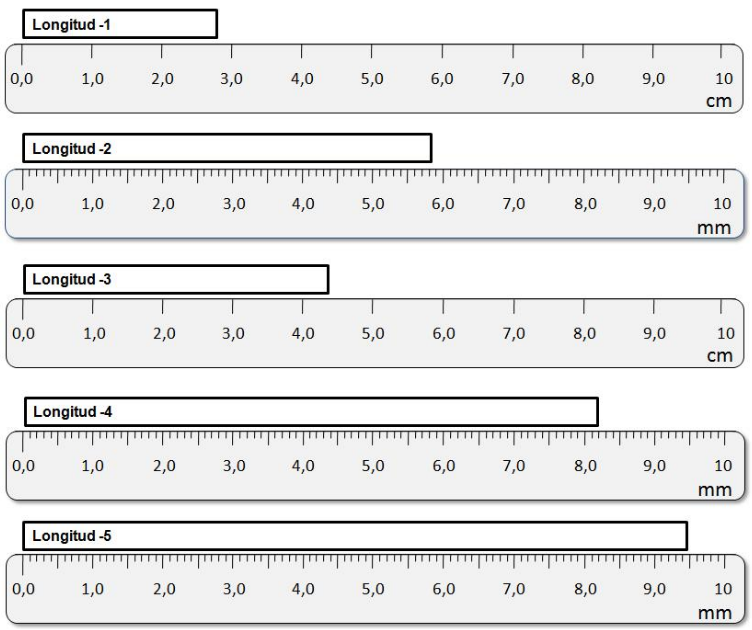


Figura 1.3: Medición de las longitudes.

experimentador también; y que, la comunicación, se hace con métodos finitos. Ante esto, es importante plantear y efectuar el experimento de modo que la exactitud de la respuesta final sea la apropiada para el objetivo primordial planteado.

Antes de continuar es necesario tener presente que el resultado de una medición se escribe, de forma general:

$$(< x > \pm \sigma)\ unidad \tag{1.1}$$

Donde $< x >$ hace referencia al valor de la medición o al promedio del conjunto de medidas, σ, en la expresión 1.1, representa la dispersión de la medición, y la unidad hace referencia a las unidades del patrón de medición utilizado.

Un resultado apropiado puede implicar los valores de las diferentes cantidades que se miden durante el experimento, los que deben obtenerse con el grado de exactitud necesario. En consecuencia, es indispensable dar alguna indicación de qué tan cerca está el resultado obtenido del valor verdadero. Esto se hace al incluir, en el resultado, una estimación de su *dispersión*. Por ejemplo, la longitud de un segmento puede ser $(10,\ 15 \pm 0,\ 05)$ cm, lo que señala que la longitud del segmento puede estar, en alguna parte, dentro del intervalo cuyos límites son 10, 10 cm a 10, 20 cm. Esto indica una afirmación de tipo probabilística. Es decir, no significa que se está seguro que el valor esté entre los límites indicados, sino que las mediciones señalan que hay cierta probabilidad de que esté ahí. Lo anterior nos brinda información sobre:

1. ***La exactitud de las mediciones***. Se dice que un resultado es exacto si esta relativamente libre de error sistemático.
   - Un error sistemático es aquel que es constante a través del conjunto de medidas. Este tipo de error puede tener como fuente al experimentador (se equivoco en un cálculo), al instrumento (tiene algún tipo de imperfección), y al método (al elaborar el método de trabajo se quedo por fuera alguna variable o aspecto que había que considerar al momento de elaborar el método de trabajo).
2. ***La precisión de las mediciones***. Se dice que un resultado es preciso si el error aleatorio es pequeño.
   - Un error aleatorio es el que varía y tiene igual posibilidad de ser positivo o negativo. Estos errores siempre están presentes en algún experimento, y en ausencia de errores sistemáticos son causa de que las lecturas sucesivas se dispersen del valor verdadero de la medida.

1.2.1. El valor medio (valor promedio) o valor más probable

Al hacer mediciones se obtiene como resultado un conjunto de datos constituido por n mediciones o lecturas de una misma magnitud física. Imagina

4,70	4,75	4,60	4,65	4,60
4,65	4,65	4,60	4,65	4,70

Cuadro 1.1: Tabla 1

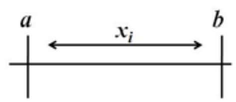


Figura 1.4: Rango dentro del cual hay una mayor probabilidad de encontrar el resultado de la medición.

que el conjunto de lecturas se encuentra contenida entre a y b (ver figura 1.4). Es decir, entre ***a*** y ***b*** encontramos el conjunto de x_i, donde cada x_i es una lectura o medida dentro del conjunto de mediciones entre ***a*** y ***b***. En este caso la x_i más probable o más próxima al valor verdadero es el ***valor medio o promedio :*** $< x_i >$. ¿Cómo se obtiene? Se obtiene a partir de la expresión siguiente:

$$< x >= \frac{\sum x_i}{n} \tag{1.2}$$

Para comprender mejor lo anterior, trabajaremos con los datos presentados en el cuadro 1.1. El instrumento de medición usado fue una regla graduada en centímetros con precisión en los milímetros.

El ***valor medio*** (valor promedio) o ***valor más próximo al valor verdadero*** del conjunto de valores mostrados en el cuadro 1.1, a partir de la expresión 1.2, es:

$$4,66\ cm \tag{1.3}$$

1.2.2. Desviación de la medida y desviación estándar.

Es importante saber cuánto se aleja o se acerca cada medida o lectura del valor más probable; en este caso, nos centraremos en la información (datos) presentada en el cuadro 1.1. La cantidad que se aleja o se acerca del valor promedio se conoce como ***desviación de la medición*** y se obtiene a través de la siguiente expresión:

$$d_i = x_i - < x > \tag{1.4}$$

En consecuencia, existe una d_i para cada medida que señala la distancia o separación del valor medio o valor promedio. Esto llega a constituir un conjunto de desviaciones (cuadro 1.2).

En este punto la pregunta es ¿cómo se obtiene el valor más probable de este conjunto de desviaciones? Una respuesta a esta cuestión implica encontrar el

Conjunto de medidas (cm)	Desviación de cada medida del valor medio (cm)
4,70	0,04
4,75	0,09
4,60	-0,06
4,65	-0,01
4,60	-0,06
4,65	-0,01
4,65	-0,01
4,60	-0,06
4,65	-0,01
4,70	0,04

Cuadro 1.2: Tabla 2

4,167	4,212	4,234	3,923	3,867
4,145	3,667	3,908	3,712	4,078
3,567	3,745	3,734	3,901	3,656

Cuadro 1.3: Tabla 3

valor más probable de las desviaciones (valor promedio de las desviaciones) por medio de la expresión:

$$< d >= \frac{\sum(x_i - < x >)}{n} \tag{1.5}$$

En este caso las desviaciones son positivas o negativas (cuadro 1.2). ¿Qué significa esto? La existencia de una desviación positiva indica, cuánto se separa la medida correspondiente de esta desviación del valor promedio por su derecha. En cuanto a la desviación negativa indica, cuánto se separa la medida correspondiente de esta desviación del valor promedio por su izquierda.

Lo siguiente es obtener el valor medio de las desviaciones, para ello tenemos,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x_i - < x >)^2}{n}} \tag{1.6}$$

La expresión 1.6 se conoce como desviación estándar.

1.2.3. Actividad 1.2

En la tabla 3 (cuadro 1.3) se muestran los datos obtenidos de la medición del diámetro de una esfera construida con papel bond, a partir de un área de 16 cm^2. Estas mediciones se realizaron con un pie de rey.

A partir de la información de la tabla 3 obtener:

1. el valor promedio del conjunto de medidas.

Figura 1.5: Figura rectangular.

2. la desviación estándar.
3. el rango dentro del cual es más probable encontrar el diamétro de la esfera construida con papel bond.
4. el resultado de la medición.

1.3. Propagación de la dispersión

Muchas veces, para conocer el valor de la ***magnitud física*** que se estudia, es necesario realizar mediciones de otras magnitudes y, a través de cálculos matemáticos con los valores obtenidos, conocer el valor de dicha magnitud. Este proceso se conoce como ***medición indirecta***. Al realizar mediciones indirectas es necesario conocer sobre la propagación de la dispersión de la magnitud física indirectamente medida.

Con la finalidad de aclarar, aún más el cálculo de la propagación de la dispersión al medir indirectamente una magnitud física, planteamos a continuación una situación ficticia. Imagínate que mediste los lados de una figura rectangular y los resultados que obtuviste son los presentados en la Figura 1.5. Con dichos resultados te interesa conocer el perímetro de la figura rectángular.

Antes de continuar, es necesario identificar claramente las variables con las que se va a trabajar. En este caso, con el largo L_2 y el ancho L_1 de la figura rectangular y con el perímetro de dicha figura P.

En primer lugar hay que identificar, qué variables se miden y qué variables se calculan. En este caso L_1 y L_2 se miden y P se calcula a través de L_1 y L_2. El perímetro de esta figura se obtiene por la siguiente expresión:

$$P = L_1 + L_2 + L_1 + L_2 = 32,\ 10\ cm \tag{1.7}$$

Pero, para completar este resultado, se hace necesario conocer la dispersión de esta medición. Para el cálculo de la dispersión de magnitudes físicas indirectamente medidas se utiliza el logaritmo. La pregunta que cabe es ¿por qué se utiliza el logaritmo?

Es de suponer que la dispersión es pequeña con respecto al valor medio. Por lo tanto, es una magnitud pequeña y trabajamos con su ***orden de magnitud***. Esto se consigue con los logaritmos.

A partir de lo anterior podemos decir que el perímetro está dado por la expresión:

$$P = 2(L_1 + L_2) \tag{1.8}$$

Se aplica el logaritmo natural a ambos miembros de la expresión y tenemos entonces como resultado:

$$lnP = ln(L_1 + L_2) + ln(2) \tag{1.9}$$

A la expresión anterior (1.8) se le busca la diferencial y se tiene en consecuencia,

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta(L_1 + L_2)}{L_1 + L_2} \tag{1.10}$$

Al reemplazar P (en la expresión 1.9) por $2(L_1 + L_2)$, tenemos:

$$\frac{\Delta P}{2(L_1 + L_2)} = \frac{\Delta(L_1 + L_2)}{L_1 + L_2} \tag{1.11}$$

Al simplificar la expresión 1.10 tenemos:

$$\Delta P = 2\Delta(L_1 + L_2) \tag{1.12}$$

En consecuencia, tenemos,

$$\Delta P = 2(\Delta L_1 + \Delta L_2) \tag{1.13}$$

La dispersión del perímetro calculado está dada por,

$$\Delta P = 2(0,\ 05\ +\ 0,\ 03)\ cm \tag{1.14}$$

Entonces,

$$\Delta P = 0,\ 16\ cm \tag{1.15}$$

Por lo tanto, el perímetro de la figura rectangular, con su dispersión, es representado por,

$$P = (32,10\ \pm\ 0,\ 16)\ cm \tag{1.16}$$

1.3.1. Actividad 1.3

Esta actividad consiste en obtener el área de la figura rectangular de la figura 1.5, con su respectiva dispersión. Las variables con las que vas a trabajar siguen siendo el largo L_2 y el ancho L_1 del rectangulo. Pero, la diferencia es que en este caso no es el perímetro la otra variable, sino el área A de la figura rectangular.

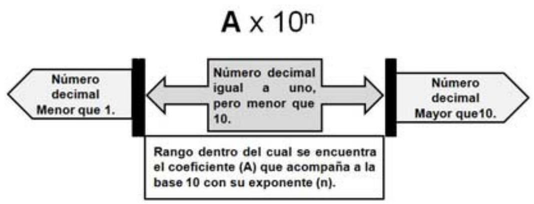


Figura 1.6: Rango dentro de***A***

.

1.4. La notación científica

La notación científica está asociada a la medición. ¿Por qué? Esto es debido a que el físico, después de hacer mediciones, ***comunica resultados***, y al hacerlo, debe indicar, entre otras cosas, la precisión (división más pequeña) del aparato con que realizó la medición y el número de cifras obtenidas, así como la incertidumbre.

La notación científica consiste en escribir el resultado de la medición como el producto de dos números: uno, mayor o igual que uno y menor que diez, y el otro, en potencia de diez, respetando, en todo momento, el número de cifras significativas. Esto implica que en el paso del resultado de la medición, escrito en notación decimal a notación científica no se debe perder información. La escritura de un número producto de medición en notación científica tiene la forma,

$$A \; x \; 10^n \tag{1.17}$$

La expresión 1.17 está constituida por:

1. ***A*** cuyo valor es ***mayor o igual a uno***, pero ***menor que diez*** (Figura 1.6). Es decir, ***A*** puede tomar valores entre 1 y 10, sin incluirlo.

2. Una base ***10*** con exponente ***n***, donde el exponente ***n*** indica para este caso la posición del primer entero escrito, ***con posición más alta***.

Antes de continuar, es necesario tener claro qué significa que ***n*** sea un exponente que indica posiciones. Por ejemplo, el valor 8 902,35 tiene como entero de posición más alta, el ocho. ¿Cuál es la posición de este entero? Usaremos como referencia la coma.

1. El primer entero antes de la coma, localizado en la posición de las unidades, se encuentra en la posición cero. En consecuencia, el número 2 se encuentra en la posición cero. Esto se simboliza como 10^0.

	POSICIONES									
Número (cm)	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**		**-1**	**-2**	**-3**	**-4**
8 902,35		**8**	**9**	**0**	**2**	,	**3**	**5**		

Figura 1.7: Posiciones de los dígitos que forman el número 8 902,35

2. El número 0 se encuentra en la posición de las decenas (posición 1 antes de la coma). Esto se simboliza como 10^1.

3. El número 9 se encuentra en la posición de las centenas (posición 2 antes de la coma). Esto se expresa 10^2.

4. El número 8 se encuentra en la posición de los miles (posición 3 antes de la coma). Esto se expresa 10^3.

5. El número 3 se encuentra en la posición de las décimas (posición -1 antes de la coma). Esto se expresa 10^{-1}.

6. El número 5 se encuentra en la posición de las centésimas (posición -2 antes de la coma). Esto se expresa 10^{-2}.

Ante lo anterior, no queda duda que el 8 es el entero de posición más alta. Con la finalidad de ayudarte a comprender lo anterior, te presentamos un esquema en la Figura 1.7.

1.4.1. Actividad 1.4

En cada uno de los valores, producto de medición, presentados en la figura 1.8 debes identificar el entero con posición más alta. Para ello, tal como te venimos diciendo el punto de referencia será la coma. Sólo para recordar te señalamos que el primer entero antes de la coma se encuentra en la posición 0 (cero), el segundo entero se encuentra en la posición 1 (uno), y asi sucesivamente. El primer entero después de la coma se encuentra en la posición -1 (menos uno), el siguiente entero en la posición -2 y así sucesivamente.

1.4.2. El redondeo

Cuando se pasa un número de notación decimal, producto de medición, a notación científica o viceversa, muchas veces se redondea o se eliminan cifras de forma indiscriminada, con lo que se pierde todo el esfuerzo de haber realizado una medición. En otras palabras no se respetan las cifras significativas. Esta perdida de valor científico del resultado de la medición, pues, no se respetaron las

Números (cm)	El entero de posición más alta	Posición en potencia de 10
0,030 050	3	10^{-2}
12,0		
345,35		
0,000 067 8 0		
732 004,35		
0,000 404 5		
2,45		
15,25		
0,000 55		
235,340 0		
1,0		

Figura 1.8: Identificación de entero con posición más alta.

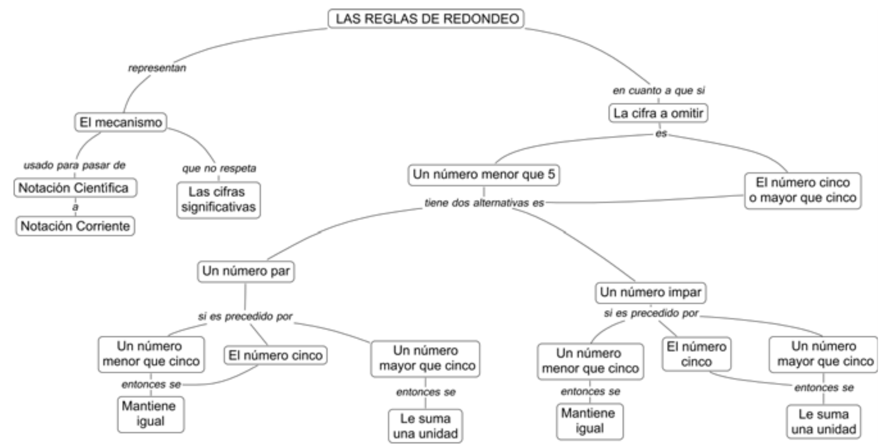


Figura 1.9: Regla más común al momento de redondear.

cifras significativas, hace que ya no tenga sentido llamar a la notación científica como tal, por lo que la pasamos a llamar, para evitar confusiones, ***notación corriente***.

El redondeo pasa a ser el medio más común o la herramienta más común para eliminar cifras de número producto de medición de forma indiscriminada. Al redondear una cifra producto de medición no se toma en cuenta la importancia de las cifras que se obtuvieron al medir, por lo que desde el momento que se redondea la notación científica ***deja de ser científica*** y pasa a ser notación corriente. Existen muchas formas y gustos para redondear; una de la más usada es la presentada en el mapa conceptual de la Figura 1.9.

1.4.3. Pasar de notación decimal a notación científica o a notación corriente

Este es un proceso simple, que se vuelve confuso cuando no hay orden y ni sistematización. Debido a esto es que vamos a tratar de ser ordenados y sistemáticos en nuestras explicaciones y centraremos nuestros esfuerzos en explicarte detalladamente como pasar un número de:

1. Notación decimal a notación científica.
2. Notación científica a notación decimal.

Esta tarea puede realizarse dentro de una clasificación que hace referencia a caraterísticas evidentes del número escrito en notación decimal, el cual puede ser un:

- Número decimal menor que 1.
- Número decimal igual o mayor que uno y menor que 10.
- Número decimal mayor que 10.

1.4.4. Con respecto a un número decimal menor que uno

Con la finalidad de que comprendas el proceso de pasar de notación decimal a notación científica, según sea el caso, vamos a trabajar con el siguiente producto de medición $0,\ 035\ g$.

Cómo sabemos, al escribir un conjunto de cifras producto de medición en notación científica lo primero que debemos tener claro es que en ambos casos se busca tener una expresión de la forma A x 10^n. Por lo que, en primer lugar, debemos ubicar el primer entero escrito con más alta posición. En este caso el primer entero escrito con más alta posición es el ***3*** y está en la posición -2. En consecuencia, es claro que la base con su exponente se representa como $\boldsymbol{10^{-2}}$.

Recuerda que las posiciones después de la coma se señalan antecediéndole un signo negativo. En cuanto a su parte decimal, todo gira alrededor del primer entero escrito con más alta posición, por lo que la posición -2 lleva a colocar la coma después del ***3***. En consecuencia, el número 0,035 se escribe si no reondeas de la siguiente forma: 3, 5 $\boldsymbol{x\ 10^{-2}}$ g (número escrito en notación científica) y si redondeas se puede escribir: $\boldsymbol{3\ x\ 10^{-2}}$ (número escrito en notación corriente). En este último caso se perdió información (se perdieron cifras significativas) al redondear.

1.4.5. Actividad 1.5

Con los nuevos conocimientos que te hemos proporcionado y la información a continuación completa la tabla 4.

1. Identificar el primer entero escrito con posición más alta.
2. Identificar la posición del entero escrito con posición más alta (n).
3. Escribir la ***base 10*** con su exponente ***n*** en la forma $\boldsymbol{10}\ ^{n}$.
4. Tener presente que la parte decimal (el coeficiente) debe ser un número igual o menor que uno, pero menor que diez. Esto se logra moviendo la coma decimal hacia la derecha, cuando trabajas con números menor que uno.
5. Recordar que cuando pasamos números escritos en notación decimal a notación científica o a notación corriente debes tener claras las diferencias entre una y otra (en un caso se pierde información, se redondea, en otro no). Por último, debes escribir el coeficiente con las reglas del sistema internacional, específicamente separar de tres en tres, antes y después de la coma, los digitos que forman la cantidad con la cual trabajas con los espacios correspondientes.

Número (g)	n	$10\ ^{n}$	Parte decimal	Notación corriente	Notación Científica
0,030					
0,002 35					
0,000 435					
0,000 000 325					
0,012					
0,000 065					
0,001 0					
0,043 5					
0,003 25					
0,456					

Cuadro 1.4: Tabla 4

1.4.6. Con respecto a un número decimal igual o mayor que uno, pero menor que diez

Cuando te encuentras con un número decimal que se encuentra dentro del rango entre 1 y 10, es decir, que es igual o mayor que uno, pero menor que diez, el proceso de pasar de notación decimal a notación corriente o notación científica, se caracteriza porque el número (el coeficiente) permanece sin cambio en cuanto a la coma decimal y se multiplica por una base con exponente cero.

Con la finalidad de que comprendas esto último, comenzaremos con un ejemplo y usaremos para ello el número: 6,25 g.

Como ya sabes al escribir un número, ya sea en notación corriente o en notación científica lo primero que debes tener claro es que en ambos casos se busca tener un número de la forma A x 10^n, donde ***n*** hace referencia a posiciones. Por lo que debes en primer lugar ubicar el primer entero escrito con más alta posición. En este caso, el primer entero escrito con más alta posición es el ***6*** y está en la posición 0. Recuerda que la posición cero está ubicada antes de la coma decimal. Con esto ya sabes que la parte correspondiente a ***la base diez*** con su exponente ***n*** es $\boldsymbol{10}\ ^{0}$. En cuanto a su parte decimal, como ya te hemos dicho se mantiene igual, no cambia al escribir dicho número decimal en notación corriente o en notación científica, pues, se mantiene dentro del rango aceptado (igual o mayor que uno, pero menor que diez). En consecuencia el número 6,25 se escribe, si no reondeas, de la siguiente forma: $\boldsymbol{6{,}25\ x\ 10}\ ^{0}$ g (número escrito en notación científica) y si redondeas se puede escribir: ***6,2 x***

Número (cm)	n	10^{n}	Parte decimal	Notación corriente	Notación Científica
2,235					
7,85					
1,15					
4,35					
5,123 25					
3,290					
9,500					
8,235					
9,255					
6,235					

Cuadro 1.5: Tabla 5

10 ^{0} (número escrito en notación corriente). Ten presente que en este último caso se perdió información.

1.4.7. Actividad 1.6

Completa la tabla 5 del cuadro 1.5. Esto implica como en el caso anterior:

1. Identificar el primer entero escrito con posición más alta.
2. Identificar la posición del entero escrito con posición más alta (n).
3. Escribir la ***base 10*** con su exponente ***n*** en la forma ***10*** ^{n}.
4. Recordar que la parte decimal (el coeficiente) debe ser un número igual o menor que uno, pero menor que diez. En este caso, el coeficiente se queda tal como está, pues, se encuentra dentro del rango establecido.
5. Recordar que cuando pasamos números escritos en notación decimal a notación científica o a notación corriente debes tener claras las diferencias entre una y otra (en un caso se pierde información, se redondea, en otro no). Por último, debes escribir el coeficiente con las reglas del sistema internacional, específicamente separar de tres en tres, antes y después de la coma, los digitos que forman la cantidad con la cual trabajas con los espacios correspondientes.

1.4.8. Con respecto a un número decimal mayor que diez

En esta ocasión nos centraremos en números escritos en notación decimal, mayores que diez y con la finalidad de que comprendas el proceso de pasar de notación decimal a notación corriente o a notación científica, en este caso, vamos a trabajar con los siguientes valores producto de medición: 42,25 g y 325,20 g.

Con respecto al número 42,25 g

1. El primer entero escrito, en este valor, con la más alta posición es el ***4*** y está en la posición 1.
2. La parte correspondiente a ***la base diez*** con su exponente ***n*** es, en este caso, ***10*** ^{1}.
3. El exponente exponente ***n*** está en el sentido positivo (puede o no, estar antecedido por un signo positivo).
4. La parte decimal, se debe caracterizar como ya sabes por que la coma se corre hacia la izquierda de su posición inicial, hasta que sea igual o mayor que uno, pero menor que diez. En este caso, este proceso nos lleva al coeficiente: 4,225.
5. El número 42,25 se escribe, si no reondeas de la siguiente forma: ***4,225 x 10*** ^{1} g (número escrito en notación científica) y si redondeas se puede escribir: ***4,2 x 10*** ^{1} (número escrito en notación corriente). Nuevamente, en este último caso se perdió información, es decir, se redondeo.

Con respecto al número 325,20 g

1. El primer entero escrito, con la más alta posición es el ***3*** y está en la posición 2.
2. La parte correspondiente a ***la base diez*** con su exponente ***n*** es, en este caso, ***10*** ^{2}.
3. El exponente exponente ***n*** esta en el sentido positivo (puede o no estar antecedido por un signo positivo).
4. La parte decimal, se debe caracterizar como ya sabes por que la coma se corre hacia la izquierda de su posición inicial, hasta que sea igual o mayor que uno, pero menor que diez. En este caso este proceso nos lleva al coeficiente: 3,252 0.
5. El número 325,20 se escribe, si no reondeas de la siguiente forma: ***3,252 0 x 10*** ^{2} g(número escrito en notación científica) y si redondeas se puede escribir: ***3,2 x 10*** ^{2}(número escrito en notación corriente). Nuevamente volvimos a perder información, a perder cifras significativas.

1.4.9. Actividad 1.7

Completa la tabla 6, del cuadro 1.6, a partir de los conocimientos que has adquiridos y de los aspectos señalados a continuación.

1. Identificar el primer entero escrito con posición más alta.
2. Identificar la posición del entero escrito con posición más alta ***n***.
3. Escribir la ***base 10*** con su exponente ***n*** en la forma ***10*** ^{n}.

Número (m)	n	10^{n}	Parte decimal	Notación corriente	notación científica
12,235					
700,85					
100,15					
4 000,35					
50 000,125					
30,25					
900,5					
80,25					
9 000,25					
60,25					

Cuadro 1.6: Tabla 6

4. Tener presente que la parte decimal (el coeficiente) debe ser un número igual o menor que uno, pero menor que diez. Esto se logra moviendo la coma decimal hacia la izquierda.

5. Recordar que cuando pasamos números escritos en notación decimal a notación científica o a notación corriente debes tener claras las diferencias entre una y otra (en un caso se pierde información, se redondea, en otro no). Por último, debes escribir el coeficiente con las reglas del sistema internacional, específicamente separar de tres en tres, antes y después de la coma, los digitos que forman la cantidad con la cual trabajas con los espacios correspondientes.

1.4.10. Normas para el paso de notación corriente o notación científica a notación decimal

En este proceso lo fundamental es tener presente el exponente del número escrito en notación corriente o notación científica. Si el exponente es positivo o negativo, entonces, la coma decimal se mueve tantas posiciones indique dicho exponente, ya sea hacia la derecha o hacia la izquierda. Estudiemos en detalle cada uno de los casos.

1. Un exponente positivo indica el número de posiciones que hay que mover la coma decimal hacia la derecha. En consecuencia, es importante ubicar la posición de la coma, que siempre está a la derecha del primer entero escrito con más alta posición (la que indica el exponente) y a partir de allí ***mover la coma decimal*** tantas posiciones, ***hacia la derecha***, como indique el exponente (figura 1.10).

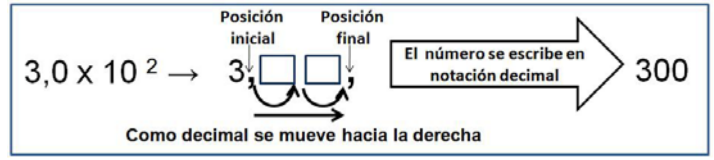


Figura 1.10: Posiciones que se mueve la coma decimal hacia la derecha.

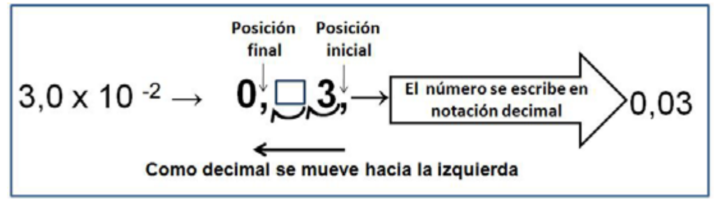


Figura 1.11: Posiciones que se mueve la coma decimal hacia la izquierda.

2. Un exponente negativo indica el número de posiciones que hay que mover la coma decimal hacia la izquierda. En consecuencia es importante ubicar la posición de la coma, que siempre esta a la derecha del primer entero escrito con más alta posición (la que indica el exponente) y apartir de allí ***mover la coma decimal*** tantas posiciones, ***hacia la izquierda***, como indique el exponente (figura 1.11).

3. Es importante que tengas presente que si vas a pasar un número escrito en notación científica a notación decimal, se puede o no se puede mantener y respetar la cantidad de cifras significativas que lo componen.

1.4.11. Actividad 1.8

A partir de lo aprendido en esta sección completa el cuadro 1.7. Debes pasar los números presentados, escritos en notación corriente, en notación decimal.

1.4.12. Números mal escritos en notación científica

El cuadro 1.8 presenta números que deben estar escritos en notación científica por lo que debes corregir. Para ellos debes tener presente las características que se le atribuyen al coeficiente (A) y a la forma en que se escribe un número de acuerdo al Sistema Internacional.

Número	Dirección de la coma	Posiciones que se mueve la coma	Notacion decimal
2,25 x 10 $^{-2}$			
6,35 x 10 ^{4}			
4,15 x 10 ^{5}			
5,35 x 10 $^{-5}$			
7,45 x 10 $^{-4}$			
9,65 x 10 $^{-3}$			
8,75 x 10 $^{-1}$			
6,65 x 10 ^{3}			
9,65 x 10 ^{7}			
8,15 x 10 ^{4}			

Cuadro 1.7: Tabla 7

Número (g)	Número escrito correctamente en notación científica
200,250567 x 10 $^{-2}$	
0,35678 x 10 ^{4}	
40,15 x 10 ^{5}	
0,00355 x 10 $^{-5}$	
701,45 x 10 $^{-4}$	
90,65 x 10 $^{-3}$	
0,705 x 10 $^{-1}$	
12,65 x 10 ^{3}	
934567,65 x 10 ^{7}	
8004,15000 x 10 ^{4}	

Cuadro 1.8: Tabla 8

Una pregunta que nos puede venir a la cabeza es, ***¿para qué sirve la notación corriente?*** Ya sabemos la utilidad de la notación decimal y de la notación científica. La utilidad de la notación corriente tiene que hacer con evaluar el ***orden de magnitud*** que es la potencia de diez que mejor representa al número.

1.5. Operaciones con números escritos en notación científica

Para realizar operaciones aritméticas básicas (suma, resta, multiplicación y división) con números escritos en notación científica debes tener presente, antes que nada que estos son números producto de la medición. En consecuencia, son números donde las cifras significativas son fundamentales, por lo que es necesario tener presente la forma en que se trabajan las operaciones de la aritmética básica (suma, resta, división y múltiplicación) con cifras significativas. Por esto, es que en primer lugar nos centraremos en las operaciones de la artimética básica con cifras significativas y luego con números escritos en notación científica.

1.5.1. Operaciones aritméticas básicas con cifras significativas

Las operaciones aritméticas básicas a tratar en esta sección con cifras significativas serán: la suma, la resta, la división y la múltiplicación.

Adición y sustracción con cifras significativas

En la adición y sustracción de cifras significativas es necesario tener presente que el resultado tendrá tantos decimales como el que menos tiene.

Estudiemos en detalle lo anterior al sumar los siguientes valores producto de medición. En una clase de Física se midió el perímetro de una figura irregular por secciones. Producto de esta medición obtuvimos los siguientes valores: 20,105 5 cm; 15,125 cm; 34,45 cm; 15,5 cm.

Analicemos la suma de las cifas significativas mostrada en la figura 1.12.

1. En la columna A, tenemos que el cinco (cifra dudosa) se suma a tres valores desconocidos. El resultado de esta suma (cifra dudosa + valores desconocidos) introduce desconocimiento en el resultado.

2. En la columna B, tenemos la suma de un valor verdadero (el 5), más una cifra dudosa (el otro 5), más dos valores desconocidos. El resultado de esta suma introduce desconocimiento en el resultado.

3. En la columna C, tenemos la suma de dos valores verdaderos (0 y 2), una cifra dudosa (el 5), y un valor desconocido. El resultado de esta suma introduce desconocimiento en el resultado.

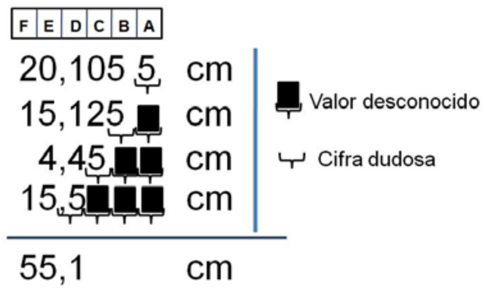


Figura 1.12: Adición con cifras Significativas.

4. En la columna D, tenemos la suma de tres valores verdaderos (1, 1 y 5), y una cifra dudosa (5). Este resultado introduce desconocimiento en el resultado.

5. Los resultados anteriores nos señalan que tenemos cuatro resultados que son desconocidos o dudosos. Pero, como recordarás no se puede tener más de una cifra dudosa,y descartamos el resto de cifras desconocidas. Por lo que el resultado debe tendrá un sólo decimal, que es la cantidad de decimales que presenta el que menos decimales tiene.

Ante lo anterior es importante tener presente que al sumar cifras significativas es necesario tener presente que no se debe:

- Tomar en cuenta la suma con cifras desconocidas.
- Aceptar los resultados que tengan menos incertidumbre e impresión. Es decir, aquellos resultados que sean producto de la suma de cifras verdaderas y una cifra dudosa, en lo posible.
- Aumentar la duda en la medición.

Todo lo anterior también es válido para la resta con cifras significativas.

Multiplicación y división

En la multiplicación y la división el resultado tiene el mismo número de cifras significativas que el número con menor número de cifras significativas.

Estudiemos en detalle lo anterior al multiplicar los siguientes valores producto de medición. En una clase de Física se midió los lados de un rectángulo, producto de esta medición obtuvimos los siguientes valores: 3,5 cm y 2,25.

Analicemos el proceso de multiplicación de las cifas significativas mostrada en la figura 1.13. Como vemos se tiene como resultado cuatro cifras dudosas, y

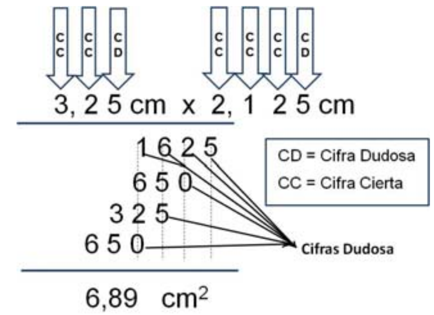


Figura 1.13: Multiplicación de cifras significativas.

como ya sabemos no podemos tener en un resultado más de una cifra dudosa. En consecuencia, sólo podemos tomar en cuenta una sola cifra dudosa, por lo que el resultado es 6,89 cm ^{2}.

1.5.2. Operaciones aritméticas básicas con números escritos en notación científica

Las operaciones con números escritos en notación científica que estudiaremos son la adición, sustracción, multiplicación y división.

Adición y sustracción

La adición y sustracción con números escritos en notación científica se caracterizan por que requieren:

1. Igualar los exponentes de la base 10 de todos los números escritos en notación científica que se vayan a sumar.
2. Sumar las cifras después de igualados los exponentes.
3. Escribir el resultado en la forma: A x 10 ^{n}. Es necesario tener presente que el resultado debe estar escrito en notación científica correcta, es decir, que cumpla con la forma A x 10 ^{n} (A es un decimal mayor que 1 y menor que 10), y respeta las reglas de cifras significativas.

Para comprender lo anterior trabajaremos con el siguiente resultado de medición:

$$4,520\ x\ 10^3\ cm + 5,55\ x\ 10^5\ cm \tag{1.18}$$

Existen dos posibilidades con para sumar los dos números, escritos en notación científica (expresión 1.18):

1. Igualar ambos exponentes, al exponente mayor, sumar los coeficientes luego de igualados los exponentes y por último escribir el número en notación científica correcta.
2. Igualar ambos exponentes, al exponente menor, sumar los coeficientes luego de igualados los exponentes y por último escribir el número en notación científica correcta.

Con respecto a igualar ambos exponentes de la expresión 1.18 al exponente mayor

En este caso para igualar ambos exponentes a $\mathbf{n = 5}$, nos centraremos en el número escrito en notación científica con el menor exponente, y este es,

$$4,520\ x\ 10^3\ cm \tag{1.19}$$

De la expresión 1.18 se trabaja específicamente con el coeficiente 4,520. En una sección anterior, aprendiste que al trabajar con números escritos en notación decimal, mayores que diez la coma decimal se mueve hacia la izquierda, tantas posiciones como se requiera para dejar el coeficiente A dentro del rango

establecido. Con ello aprendiste, además, que cada vez que se mueve la coma hacia la izquierda se tiene un exponente positivo. En el caso que estamos analizando, para igualar ambos exponentes al exponente mayor, necesitamos sumar dos unidades positivas al exponente menor, pues, esa es la diferencia entre 10^3 y 10^5. Ello implica mover la coma dos espacios hacia la izquierda y al hacer esto tenemos,

$$0,045\ 20\ x\ 10^5\ cm \tag{1.20}$$

La expresión 1.20 nos señala que hemos igualado los exponentes de los números escritos en notación científica que vamos a sumar, al exponente mayor.
Lo siguiente es sumar los coeficientes. Debes recordar que al sumar cifras significativas el resultado tiene la misma cantidad de decimales que el valor que menos tiene,

$$0,045\ 20\ cm + 5,55\ cm = 5,59\ cm \tag{1.21}$$

Ahora se procede a escribir el resultado de esta suma en notación científica correcta,

$$5,59\ x\ 10^5\ cm \tag{1.22}$$

1.5.3. Actividad 1.9

Sumar los siguientes números en notación científica, elevando el exponente menor al exponente mayor.

1. 6,50 x 10^4 cm + 3,25 x 10^2 cm
2. 2,15 x 10^{-3} cm + 1,65 x 10^{-1} cm
3. 8,15 x 10^{-2} cm + 2,85 x 10^{-1} cm
4. 9,25 x 10^4 cm + 1,25 x 10^5 cm
5. 4,25 x 10^6 cm + 1,35 x 10^5 cm

Con respecto a igualar ambos exponentes de la expresión 1.18 al exponente menor

En este caso para igualar ambos exponentes a n = 3, nos centraremos en el número escrito en notación científica con el mayor exponente, y este es,

$$5,55\ x\ 10^5\ cm \tag{1.23}$$

De la expresión 1.18 se trabaja específicamente con el coeficiente 5,55 cm. En lecciones anteriores aprendiste que al trabajar con números escritos en notación decimal menores que uno, la coma decimal se mueve hacia la derecha, tantas posiciones como se requiera, para dejar el coeficiente A dentro del rango establecido. Además, también aprendiste que cada vez que se mueve la coma hacia la derecha, el exponente de la base diez es negativo. En el caso que estamos analizando, para igualar ambos exponentes al exponente menor, necesitamos sumar al exponente mayor dos unidades negativa, pues, esa es la diferencia entre 10^5 y 10^3. Esto implica mover la coma dos posiciones hacia la derecha y al hacer esto tenemos,

$$555\ x\ 10^3\ cm \tag{1.24}$$

La expresión 1.24 nos señala que hemos igualado los exponentes de los números escritos en notación científica que vamos a sumar, al exponente menor.
Lo siguiente es sumar los coeficientes. Debes recordar que al sumar cifras significativas el resultado tiene la misma cantidad de decimales que el valor que menos tiene,

$$4,520 + 559 = 559\ cm \tag{1.25}$$

A partir de este resultado se procede a escribir el resultado de esta suma,

$$559\ x\ 10^3\ cm \tag{1.26}$$

Pero, esta expresión no está correctamente escrita en notación científica. El coeficiente no puede ser un número mayor que cinco y 559 es un número mucho mayor que cinco. En este caso escribimos 559 en notación científica. Obtenemos de este proceso, el siguiente número,

$$5,59\ x\ 10^5\ cm \tag{1.27}$$

Como puedes apreciar la expresión 1.21 y 1.27 muestran que no importa a que exponentes iguales los números escritos en notación científica, el resultado será el mismo.

1.5.4. Multiplicación y división con números escritos en notación científica

En cuanto a la multiplicación y división de números escritos en notación científica es importante tener presente los aspectos que señalaremos a continuación.

Con respecto a la múltiplicación de números escritos en notación científica

En este sentido remarcamos los siguientes aspectos:

1. La múltiplicación de números escritos en notación científica requiere:
   a) Multiplicar los coeficientes de los números escritos en notación científica a multiplicar.

   b) Sumar algebraicamente los exponentes de ambos números escritos en notación científica.
2. El resultado de lo anterior debe estar escrito en notación científica correcta, es decir, que cumpla con la forma 10^n (A es un decimal mayor o igual a uno, pero menor que 10), y respeta las reglas de las cifras significativas.

Con respecto a la división de números escritos en notación científica

En este sentido remarcamos los siguientes aspectos:

1. La división de números escritos en notación científica requiere:
   a) Dividir los coeficientes de los números escritos en notación científica a dividir.
   b) Restar algebraicamente los exponentes de ambos números escritos en notación científica.
2. El resultado de lo anterior debe estar escrito en notación científica correcta, es decir, que cumpla con la forma 10^n (A es un decimal mayor o igual a uno, pero menor que 10), y respeta las reglas de las cifras significativas.

1.5.5. Actividad 1.10

Multiplica o divide según sea el caso según lo estudiado en la sección anterior sobre la multiplicación y división de números escritos en notación científica.
Sumar los siguientes números en notación científica, elevando el exponente mayor al exponente menor.

1. $\frac{6{,}50\ x\ 10^4\ cm}{3{,}5\ x\ 10^2\ cm}$
2. $\frac{8{,}400\ x\ 10^6\ g}{2{,}50\ x\ 10^{-5}\ g}$
3. $(9,50\ x\ 10^3\ cm)x(1,5\ x\ 10^4\ cm)$
4. $\frac{1{,}400\ x\ 10^{-4}\ mm}{2{,}0\ x\ 10^{-4}\ mm}$
5. $(7,40\ x\ 10^8\ cm)x(3,5\ x\ 10^6\ cm)$
6. $(9,85\ x\ 10^3\ cm)x(3,5\ x\ 10^{-4}\ cm)$

1.5.6. Orden de magnitud

El concepto orden de magnitud nace que algunas magnitudes Físicas, al medirlas, varían en intervalos demasiados grandes o demasiados pequeños. Dichas variaciones no son iguales a las que consideramos en nuestra vida diaria. Podemos mencionar algunos ejemplos:

1. El tiempo transcurrido desde la época de los Dinosaurios.

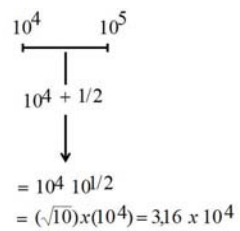


Figura 1.14: Esquema sobre la potencia de 10 más cercana al valor de interés.

2. La edad de las rocas más antiguas.
3. El diámetro de un glóbulo rojo.
4. El tiempo transcurrido desde que comenzaste tus estudios medidos en segundo.

Los ejemplos anteriores se caracterizan por conformar intervalos de tiempo variables. En consecuencia, no tendría sentido especificalos con toda precisión, es más apropiado hablar de sus órdenes de magnitud.

Reflexionemos un poco sobre el concepto orden de magnitud

El orden de magnitud es la potencia de 10 más cercana al valor de interés. Por ejemplo, imagina que tienes que dar el orden de magnitud de 3,2 x 10^4. Dar el orden de magnitud de esta cantidad implica responder la pregunta, ¿Cuál sería la potencia de diez más cercana o próxima a este valor?

Para responder la pregunta anterior se parte buscando la magnitud que hay entre 10^4 y 10^5. Veamos esto en detalle. La mitad entre 10^4 y 10^5, es

$$10^{4+\frac{1}{2}} = 10^4 10^{\frac{1}{2}} = (\sqrt{10})\ x\ (10^4) = 3,16\ x\ 10^4 \tag{1.28}$$

Lo anterior lo podemos ver esquematizado en la figura 1.14.

En este caso ***3,16*** es la magnitud mitad que hay entre 1 y 10, valor que se usa como referente para encontrar el orden de magnitud de una cantidad cualquiera. Para establecer la potencia de 10 más cercana al valor de interés, utilizamos ***3,16***, en este sentido hay dos alternativas.

1. Si el coeficiente que acompaña a la base diez con el exponente n, es mayor que ***3,16***, entonces el orden de magnitud se obtiene, al agregar una unidad a dicho exponente.
2. Si el coeficiente que acompaña a la base diez con el exponente n, es menor que ***3,16***, entoces el orden de magnitud está dado por la potencia de base 10 y su respectivo exponente.

1.5.7. Actividad 1.12

Los ejercicios a continuación tienen como objetivo que pongas en práctica lo aprendido en esta unidad didáctica. Antes de comenzar ten presente las normas de operaciones con cifras significativas.

1. Pasar de notación decimal a notación científica
   - *a*) 123,50 m ____________
   - *b*) 23,45 cm ____________
   - *c*) 5 109,50 g ____________
   - *d*) 48 120,555 345 g ____________
   - *e*) 5,50 km ____________
   - *f*) 0,456 345 g ____________
   - *g*) 0,000 675 g ____________
   - *h*) 0,000 000 45 g ____________
   - *i*) 0,505 g ____________
   - *j*) 0,004 675 ____________
2. Pasar de notación científica a notación decimal
   - *a*) 2,355 465 x 10^4 m ____________
   - *b*) 1,251 0 x 10^{-3} cm ____________
   - *c*) 5,35 x 10^0 g ____________
   - *d*) 6,055 235 x 10^6 g ____________
   - *e*) 8,105 x 10^1 km ____________
   - *f*) 9,150 00 x 10^5 g ____________
   - *g*) 1,555 000 x 10^{-6} g ____________
   - *h*) 7,150 x 10^2 g ____________
   - *i*) 4,910 x 10^0 g ____________
   - *j*) 3,150 x 10^3 km ____________
3. Verificar si los siguientes números escritos en notación científica están bien escritos.
   - *a*) 212,35 x 10^4 m ____________
   - *b*) 10,25 x 10^{-3} cm ____________
   - *c*) 0,535 x 10^0 g ____________
   - *d*) 0,000 605 x 10^6 g ____________
   - *e*) 813,10 x 10^1 km ____________
   - *f*) 915,0 x 10^5 g ____________

g) 155,25 000 x 10^{-6} g ______________________
h) 0,071 5 x 10^{2} 45 g ______________________
i) 49,10 x 10^{0} g ______________________
j) 3 152 x 10^{3} km ______________________

4. Sumar los siguientes números escritos en notación científica.

a) 2,350 x 10^{4} m + 1,25 x 10^{3} m
b) 1,25 x 10^{-3} cm + 5,350 00 x 10^{0} cm
c) 6,050 x 10^{6} g + 8,10 x 10^{3} g
d) 9,15 x 10^{-4} m + 1,550 000 x 10^{-2} m
e) 1,550 x 10^{6} km + 7,15 x 10^{4} km

5. Restar los siguientes números escritos en notación científica.

a) 4,350 5 x 10^{5} m − 2,250 x 10^{3} m
b) 8,255 000 x 10^{-2} cm − 6,35 x 10^{0} cm
c) 7,055 x 10^{4} g − 5,10 x 10^{3} g
d) 9,15 x 10^{-3} m − 2,550 00 x 10^{-2} m
e) 4,555 x 10^{5} km − 7,15 x 10^{7} km

6. Multiplicar los siguientes números escritos en notación científica.

a) (2,00 x 10^{2} km) x (3,0 x 10^{5} km)
b) (3,000 x 10^{-6} cm) x (5,15 x 10^{-3} cm)
c) (5,025 x 10^{1} m) x (2,15 x 10^{-4} m)

7. Dividir los siguientes números escritos en notación científica.

a) $\frac{4{,}650\ 345\ x\ 10^{-4}\ m}{2{,}000\ x\ 10^{-8}\ m}$
b) $\frac{6{,}600\ x\ 10^{-3}\ cm}{3{,}00\ x\ 10^{2}\ cm}$
c) $\frac{1{,}000\ x\ 10^{4}\ km}{2{,}00\ x\ 10^{8}\ km}$
d) $\frac{8{,}0\ x\ 10^{-3}\ m}{2{,}0\ x\ 10^{-6}\ m}$
e) $\frac{3{,}000\ x\ 10^{-6}\ cm}{2{,}0\ x\ 10^{2}\ cm}$

a) 2,55 x 10^{22} m ______________________
b) 1,25 x 10^{15} cm ______________________
c) 5,35 x 10^{8} g ______________________
d) 6,5 x 10^{25} g ______________________
e) 8,15 x 10^{15} km ______________________

f) 9,15 x 10^{9} g ______________________
g) 1,5 x 10^{16} g ______________________
h) 7,15 x 10^{35} g ______________________
i) 4,9 x 10^{12} g ______________________
j) 3,15 x 10^{10} km ______________________

1.6. Construcción y análisis de representaciones gráficas

En ciencias experimentales el uso de gráficas es muy común. Por lo que en esta sección nos centraremos en las relaciones funcionales más usadas dentro de una clase de Física, en secundaria y en los primeros años de universidad en el área científica.

Estudiaremos y analizaremos en esta sección cuatro tipos de relaciones funcionales: proporción directa, función lineal, potencial y exponencial. Te invitamos a leer con atención y a reflexionar sobre lo que lees y haces.

1.6.1. Relación proporcional directa

Para las relaciones lineales, que es el caso en donde la recta que representa el fenómeno pasa por el origen,la ecuación se escribe,

$$y = mx \tag{1.29}$$

En la expresión 1.29, tenemos que $\boldsymbol{m}$ es la pendiente de la recta. Para formular la ecuación, que expresa una ***relación proporcional directa***, se debe determinar la inclinación de la recta con respecto al eje horizontal (abscisa). A esa ***inclinación*** también se le llama ***pendiente***. Una forma de medir (medición indirecta) la pendiente es eligiendo dos puntos cualesquiera (x_1, y_1), (x_2, y_2) de la recta y evaluando la expresión,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{1.30}$$

Con el objetivo de que refresques tus conocimientos sobre cómo se evalúa y obtiene la pendiente de una línea recta te referimos a la Figura 1.15, la cual procedemos a explicarte inmediatamente.

Luego de localizados los puntos sobre el plano cartesiano debes:

1. trazar la línea recta, si esta es la forma que prevalece, que pase por la mayor cantidad de puntos. No importa que se queden puntos fuera de dicha recta tal como te mostramos en la figura 1.15.

2. elegir dos puntos cualesquiera que estén sobre la línea recta trazada. No puedes elegir puntos que estén fuera de dicha línea recta.

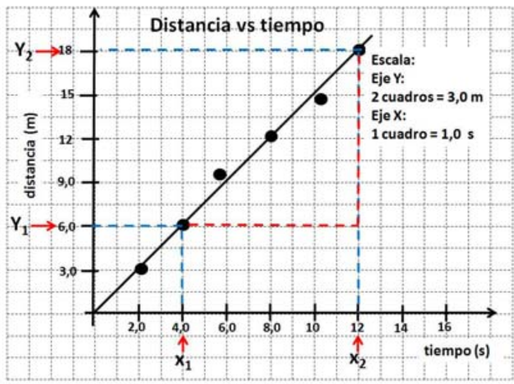


Figura 1.15: Cálculo de la pendiente de una línea recta.

3. trazar dos rectas perpendiculares a cada uno de los ejes del plano que pasen por dichos puntos.
4. encontrar las coordenadas para cada punto elegido, es decir, encontrar el valor de la abscisa (x) y la ordenada (y) para cada punto (ver figura anterior).
5. reemplazar dichos valores en la expresión: m = $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
6. calcular el valor de la pendiente (m) a partir de los valores encontrados.
7. colocar al valor encontrado las unidades que le corresponden.

Al seguir el procedimiento descrito arriba encontramos,

$$m = \frac{18,0\,m - 6,0\,m}{12,0\,s - 4,0\,s} = \frac{12,0\,m}{8,0\,s} = 1,5\,m/s \tag{1.31}$$

Realicemos el mismo procedimiento descrito arriba, pero en esta ocasión elige de la gráfica mostrada en la Figura 1.15, dos puntos diferentes a los elegidos anteriormente. Tendrás como resultado un valor muy parecido o casi igual al que nosotros obtuvimos.

En cuanto a la ecuación de la recta te podemos decir que la misma ya la conoces, es $\boldsymbol{y = mx}$. Pero dicha ecuación debe ser particularizada de acuerdo a la información que se presenta en la gráfica. En este caso en el ***eje vertical*** o el ***eje y*** se encuentra representada la distancia, por lo tanto, el ***eje y*** pasa a ser representado por la letra ***d***. En cuanto al ***eje horizontal*** o ***eje x*** en el mismo

Tiempo (s)	Distancia (m)
1,2	4, 2
2,5	9, 0
3,7	13, 3
5,0	17, 5
4,2	14, 7
5,5	19, 3

Cuadro 1.9: Tabla 9

se encuentra representado el tiempo, en consecuencia en este caso el ***eje x*** pasa a ser representado por la letra ***t***. Por ello, la ecuación particular para la gráfica anterior es: $\boldsymbol{d = mt}$, al reemplazar el valor de $\boldsymbol{m}$ tenemos que dicha ecuación se expresa,

$$d = (1,5\,m/s)\,t \tag{1.32}$$

En cuanto a las unidades, cuando expresas la ecuación matematicamente las mismas pueden ser omitidas y dicha ecuación se puede expresar como,

$$d = (1,5)\,t \tag{1.33}$$

Por último, te podemos decir que la llamada «***regla de tres***» sólo se puede aplicar si la función que relaciona a las variables es una proporcionalidad directa.

1.6.2. Función lineal

En el caso de que la recta no parta del origen, la misma es representada por la siguiente ecuación, $y = mx + y_0$. Donde, y_0 es el punto de intersección con el eje vertical, es decir, el valor de $\boldsymbol{y}$ cuando $\boldsymbol{x = 0}$. En cuanto a la pendiente y la ecuación del gráfico, se obtienen de la misma forma descrita arriba dentro de la sección función directamente proporcional.

1.6.3. Actividad 1.12

1. Representa graficamente los datos mostrados en las tablas 9 y 10 en hojas milimetradas, específicamente, construye en dichas hojas los gráficos:

   a) ***Distancia*** vs ***tiempo***.

   b) ***Velocidad*** vs ***tiempo***.

2. Para cada gráfico construido obtén su pendiente y su respectiva ecuación.

tiempo (s)	Velocidad (m/s)
0,0	102
50	201
100	305
155	410
208	520
254	603

Cuadro 1.10: Tabla 10

1.6.4. Función exponencial

Una función exponencial es de la forma y = A b^x; donde la base ***b***es un número y el exponente es una variable. La función que mejor representa la función exponencial es la tiene como base a ***e*** que es un número trascendente igual a 2,718, llamado base natural.

La ecuación general de la función exponencial natural es de la forma: $y = y_0 e^{(mx)}$ o en manera más general:

$$y = y_0 \; exp \; (mx) \tag{1.34}$$

En la expresión 1.34 tenemos que y_0 es el valor de ***y*** cuando ***x = 0***, ***m*** es un número que puede ser positivo (función exponencial creciente), negativo (función exponencial decreciente), entero o fraccionario y ***mx*** es el exponente de la función, el cual es variable. De manera general se llama función exponencial a la función que tiene como base un número y como exponente la variable x. La función ***exp*** es la función que tiene como base el número irracional $e = 2,718...$, (los números irracionales son aquellos que se escriben como una serie infinita de dígitos y que no pueden ser escrito en forma de una razón entre dos números enteros). La función exponencial natural es la inversa de la funció logaritmo natural que tiene la misma base ***e***. Existen otras funciones exponenciales con otras bases, por ejemplo $y = y_0 10^{mx}$. Es una función exponencial en ***base 10*** y su logaritmo también es en base 10. Estas funciones pueden escribirse como funciones en base ***e***, así: $y = y_0 \; exp \; [m(ln10)x] = y_0 \; exp \; (m'x)$, donde $m' = m(ln10)$.

Si se aplica la función logaritmo natural a ambos miembros de la ecuación que define la función exponencial se tiene,

$$lny = mx + lny_0 Y = mx + Y_0 \tag{1.35}$$

En la expresión 1.35 tenemos que ***Y = lny*** y $Y_0 = lny_0$; es decir que la función exponencial resulta una línea recta si se representa a ***y*** en una escala logarítmica, en función de ***x*** en escala lineal. Esto será también cierto si utilizamos los logaritmos en base ***10 (log)***, en lugar de los ***logaritmos naturales (ln)***, porque el logaritmo de un número en una base cualquiera es proporcional al logaritmo del mismo número en otra base. Por lo tanto, si un

gráfico de ***Y = ln y*** en función de ***x*** da una línea recta, lo mismo será con el gráfico de ***Y = log y*** en función de ***x***.

Podemos realizar representaciones semilogarítmicas (esto quiere decir que el eje de las abcisas es logarítmico y el eje de las ordenadas es lineal), sin tener que buscar todos los logaritmos de la variable ***y*** en una tabla de logaritmos. Se utiliza un papel gráfico que tiene trazado una escala logarítmica en uno de sus ejes (abscisas) y una escala lineal en el otro (ordenada).

El valor de ***m*** en la ecuación exponencial se determina escogiendo dos puntos cualesquiera de la gráfica y reemplazando sus coordenadas en la siguiente ecuación,

$$m = \frac{lny_2 - lny_1}{x_2 - x_1} \tag{1.36}$$

El valor de y_0 se determina por intersección con el eje vertical cuando ***x = 0***, o por sustitución en la ecuación general conociendo previamente el valor de ***m***, y sustituyendo un par de valores de ***y*** y ***x***.

1.6.5. Actividad 1.13

Representa gráficamente los datos mostrados en la tabla 11. Específicamente, construye la gráfica ***distancia*** vs ***tiempo*** en una hoja milimetrada y luego la linearizas en una hoja semi logarítmica. A partir de esta última representación gráfica (la de la hoja semi logarítmica), encuentra la pendiente y la ecuación que representa la relación funcional entre las variables que se estudian.

1.6.6. Función potencial

Cuando una variable ***y*** es proporcional a otra variable ***x*** (llamada base) elevada a una potencia ***m*** (llamado exponente), en donde ***m*** es una constante positiva (función potencial creciente), negativa (función potencial decreciente), entera o fraccionaria, se dice que la función es potencial y se expresa por la ecuación general:

$$y = y_0 \; x^m \tag{1.37}$$

En la expresión 1.37 tenemos que, y_0 es la constante de proporcionalidad y ***m*** es otra constante que se denomina la potencia de la función.

Cuando se multiplican dos funciones potenciales que tienen la misma base, el resultado del producto se obtiene tomando la misma base con un exponente que es la suma de los exponentes de las dos funciones. Esto es similar al comportamiento de la función exponencial. En la situación inversa, cuando tenemos distintas bases y un mismo exponente (m) el resultado del producto debe facilitarse con la función inversa de la función exponencial que es la función logarítmica.

En la situación planteada tenemos dos constantes: el exponente **m** y el factor de proporcionalidad y_0. De allí la sugerencia de trabajar con los logaritmos.

Tiempo (s)	Distancia (m)
0,20	1, 2
0,30	1, 3
0,40	1, 5
0,50	1, 6
0,60	1, 8
0,70	2, 0
0,80	2, 2
0,90	2, 5
1,0	2, 7
1,1	3, 0
1,2	3, 3
1,3	3, 7
1,4	4, 1
1,5	4, 5
1,6	5, 0
1,7	5, 5
1,8	6, 0
1,9	6, 7
2,0	7, 4

Cuadro 1.11: Tabla 11

Estas constantes se pueden encontrar escribiendo la ecuación en términos de sus logaritmos, es decir buscando los logaritmos, en ambos miembros de la ecuación,

$$log\ y = m\ log\ x\ +\ log\ y_0 \tag{1.38}$$

$$Y = mX + Y_0 \tag{1.39}$$

Comparando la expresión 1.38, con la ecuación de la línea recta (expresión 1.39), tenemos que Y = log y, X = log x y que $Y_0 = log\ y_0$. Por lo tanto, cuando representamos $\boldsymbol{Y = log}$ y en función de $\boldsymbol{X = log\ x}$ se debe obtener una línea recta.

Para representar las funciones potenciales no tenemos que buscar los logaritmos de todos los números, para esto podemos utilizar escalas en donde los segmentos de ambos ejes de coordenadas estén calibrados logarítmicamente. Este tipo de escala se encuentra representado en un papel que recibe el nombre de doblemente logarítmico o papel $log - log$. En realidad en este papel las escalas son proporcionales a los logaritmos naturales pues se construyen en el sistema decimal por ello se llama logaritmo en base diez y se anota ***log*** en vez del logaritmo de base $\boldsymbol{e}$, el cual se anota ***ln***.

Al graficar una función potencial en el *papel* $log - log$ obtenemos inmediatamente una línea recta que nos facilita la medición de las constantes y_0 y $\boldsymbol{m}$.

La constante y_0 es el valor de $\boldsymbol{y}$ que corresponde a $x = 1$. Cuando los valores en el eje X comienzan con $x = 1$ o $X = 0$, entonces y_0 está dado directamente por el intercepto de las rectas con el eje vertical, si no es así, hay que buscar el valor de y_0 por interpolación o por cálculo numérico.

En la ecuación expresada con los logaritmos, $\boldsymbol{m}$ está determinada por la pendiente de la gráfica. En la gráfica lineal que hemos obtenido sobre el papel $log - log$, la pendiente es la razón entre los dos segmentos:$\frac{\Delta Y}{\Delta X}$. Para determinar la pendiente marcamos dos puntos sobre la recta y a partir de ellos construimos un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es un segmento de la recta. Medimos los segmentos $\Delta X\ y\ \Delta Y$, que son los catetos del triángulo y encontramos el cociente entre ellos, lo que nos dará la pendiente.

1.6.7. Actividad 1.14

Representa gráficamente los datos mostrados en la tabla 12. Específicamente construye el gráfico ***distancia*** vs ***tiempo*** en una hoja milimetrada y luego, lo linearizas en una hoja doblemente logarítmica. A partir de esta última representación gráfica (la de la hoja doblemente logarítmica), encuentra la pendiente y ecuación que representa la relación entre las variables que se estudian.

Tiempo (s)	Distancia (m)
2,0	12
4,0	48
6,0	108
8,0	192
10	300
12	432
14	588
26	2028
32	3072
54	8748
50	7500

Cuadro 1.12: Tabla 12

1.7. Magnitudes físicas escalares y vectoriales

El Físico después de haber elegido el fenómeno a estudiar, procede a caracterizar dicho fenómeno. Caracterizar, implica, **identificar las magnitudes físicas más relevantes del fenómeno**. Pero, ¿qué es una magnitud física? Una magnitud física representa aquellas propiedades o características del fenómeno sujetas a medición. Es decir, ***son magnitudes físicas de un fenómeno, sólo aquellas propiedades o características representativas del mismo, que pueden ser medidas por el Físico***.

1.7.1. Magnitudes físicas escalares

Las magnitudes físicas más sencillas de manejar son las magnitudes ***físicas escalares***. Algunas de estas magnitudes físicas son muy conocidas en nuestro entorno cotidiano y quedan totalmente definidas por un número y su respectiva unidad. Por ejemplo, la masa de un cuerpo, es una magnitud física escalar y que queda totalmente definida por un número y su unidad. Todos entendemos que quiere decir 1,0 kg de arroz, por lo que la masa es una magnitud física escalar. En igual forma, todos comprendemos lo que significa que una persona tenga 42 °C de temperatura. Ambas expresiones se caracterizan por que tienen como eje central una cantidad que se ve representada por un número y su respectiva unidad.

1.7.2. Magnitudes físicas vectoriales

Los vectores, al igual que los escalares son herramientas matemáticas para los físicos. Por lo general, estas herramientas son confundidas o comprendidas como ***física***. Y como herramientas, son usadas en la misma forma que un ebanista usa un martillo o una sierra.

El manejo de los vectores como herramienta matemática de los físicos, implica conocer las características que tienen y aprender a representarlos sobre un plano cartesiano. En estos dos aspectos nos centraremos a continuación. Las Magnitudes Físicas Vectoriales (vectores), por lo general pueden ser simbolizadas por:

1. letras en mayúscula, con una flecha arriba $\vec{A}$.
2. letras en negritas, ya sea en mayúscula ***(A)*** o en minúscula ***(a)***.

Una magnitud física vectorial está constituido por: un módulo, una dirección – sentido. Los vectores se representan como una flecha, pero es necesario e indispensable que te llevemos a que conozcas e identifiques cada uno de los elementos que dan forma al vector para ser representado por una flecha. En el caso del módulo, el mismo es representado por la longitud de la flecha ($\longrightarrow$). Dicha longitud es representada en un plano cartesiano, sobre el cual se representan los ejes cardinales que permiten representar a su vez, un sentido y una dirección (ángulo). Entonces, ¿Cómo se representa simbólicamente un vector? Un vector se representa simbólicamente, como sigue,

$$\vec{A} = 100\,m,\ 30^\circ\ al\ norte\ del\ este \tag{1.40}$$

La expresión anterior nos dice que el módulo del vector $\vec{A}$ es ***100 m***, en cuanto a los 30 ° nos habla de la dirección del vector y la expresión ***al norte del este*** nos habla del sentido de dicho vector.

1.7.3. Representación gráfica de un vector

Los vectores pueden ser representados, tanto, de forma simbólica, como de forma gráfica. Vamos a representar gráficamente el vector,

$$\vec{A} = 10\,m,\ 30^\circ\ al\ norte\ del\ este \tag{1.41}$$

Esta tarea requiere:

- Dibujar un plano cartesiano y señalar sobre el mismo los ejes cardinales.
- Establecer la escala a utilizar, tomando en cuenta el módulo del vector.

Por ejemplo, en el caso del vector que estamos representando una posible escala es: 1,0 cm = 5,0 m. Lo que implica que el módulo del vector a representar tendrá una longitud de 2,0 cm.

- Identificar el cuadrante donde debe ser dibujado el vector.

El cuadrante donde hay que dibujar el vector está dado por el sentido del vector. En este caso, el vector se encuentra localizado en el ***primer cuadrante*** o ***norte del este***.

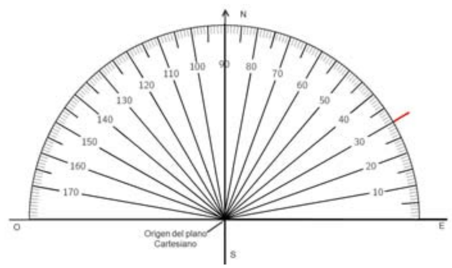


Figura 1.16: Uso del transportador al representar un vector.

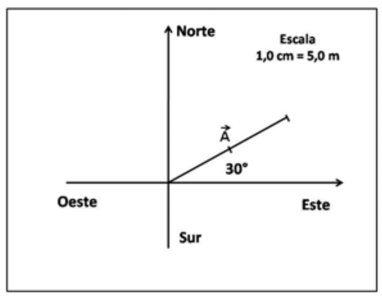


Figura 1.17: Representación gráfica del vector $\vec{A}$.

- Medir el ángulo tomando como referencia el eje horizontal (dirección oeste este). Seguido se marca con un punto el lugar correspondiente a los 30º. (Ver figura 1.16). Recuerda que la convencción de ángulo es contraria a la manecillas del reloj.

- Trazar un segmento que una el punto marcado, en el plano cartesiano referente a los 30 º, con el punto de origen del plano cartesiano (ver figura 1.17). La convencción dice que siempre se va del origen al punto, al poner la flecha.

Es importante que tengas presente que:

1. Debe aparecer la escala que utilizaste para representar el vector. Por lo general, la escala se coloca en la parte superior derecha del plano cartesiano

donde se representa el vector ***(es una convención)***. No existe una única convención, existen muchas, pero, cuando eliges una para trabajar debes respetarla y no cambiarla a lo largo del camino.

2. Si, la escala es de 1,0 cm = 5,0 cm, entonces, el segmento dibujado debe tener una longitud de: 2,0 cm. ¿Por qué se escribe con dos cifras? El número escrito es resultado de una medición cuantitativa donde el resultado debe tener por lo menos una cifra cierta (siempre la última cifra es dudosa).

3. Debes señalar sobre el vector dibujado (la flecha dibujada), en el plano cartesiano, el nombre del vector (la letra que lo representa) y el ángulo medido.

1.7.4. Actividad 1.15

1. Representa gráficamente, en tú cuaderno (o donde te sea más cómodo), los siguientes vectores:

$$\vec{A} = 40\ m,\ 60°\ \textit{al norte del este}$$
$$\vec{C} = 60\ m,\ 20°\ \textit{al norte del oeste}$$
$$\vec{D} = 20\ m,\ 50°\ \textit{al sur del este}$$
$$\vec{E} = 30\ m,\ 40°\ \textit{al sur del oeste}$$
$$\vec{F} = 10\ m,\ \textit{al norte}$$
$$\vec{G} = 5{,}0\ m,\ \textit{al este}$$
$$\vec{H} = 12\ m,\ \textit{al sur}$$
$$\vec{J} = 6{,}0\ m/s,\ \textit{al oeste}$$

1.8. Suma gráfica de vectores

Existen dos formas de sumar vectores gráficamente, una es haciendo uso del método del paralelogramo y la otra haciendo uso del método del polígono. A continuación te explicaremos en detalle cada uno de estos dos métodos, además de la resta gráfica de vectores.

1.8.1. Método del paralelogramo

El método del paralelogramo se caracteriza porque:

1. la suma gráfica de vectores implica trabajar con una sola escala al momento de representar gráficamente el conjunto de vectores que se van a sumar.

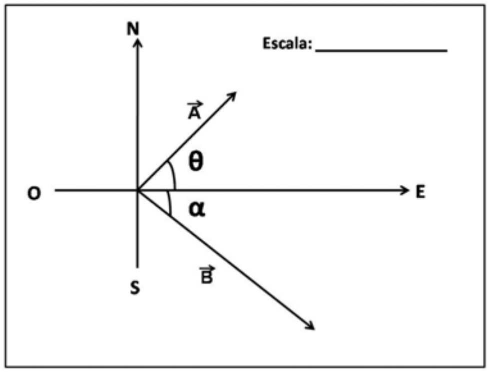


Figura 1.18: Vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$

2. la ***cola origen*** o ***punto inicial*** de los dos vectores a sumar, se colocan juntas, es decir, ambos vectores se dibujan a partir del origen del plano cartesiano (figura 1.18);
3. la proyección de una línea paralela a partir de la punta final de cada vector a sumar (figura 1.19), ayuda a tener un punto de referencia al momento de trazar el vector resultante;
4. el punto donde se intersectan estas dos líneas paralelas, se coloca la punta final del vector resultante ($\vec{R}$) y el origen del mismo se encuentra en el origen del plano cartesiano. Este vector hace un ángulo φ con el eje horizontal (figura 1.19).

El módulo del vector resultante se obtiene multiplicando la longitud del vector resultante por el valor de la escala utilizada. El producto de esta multiplicación se presenta con las mismas unidades de la escala.

La dirección del vector resultante, se obtiene al medir el ángulo (φ) que hay entre el ***vector resultante*** y el ***eje x*** con un transportador. En este caso el ***eje x*** está representado por el ***este***.

El sentido del vector resultante es, en este caso: ***sur del este***, si se lee el ángulo con respecto al eje x (este). Si el vector resultante hubiese estado en el segundo cuadrante, entonces su sentido sería al ***norte del oeste***. Esto es así, si se lee el ángulo con respecto al eje x (oeste). Debes aplicar el mismo razonamiento, si tuvieses un vector, por ejemplo, en el primer o tercer cuadrante.

La presentación del resultado de esta suma de vectores, implica seguir el esquema de presentación mostrado en la figura 1.20.

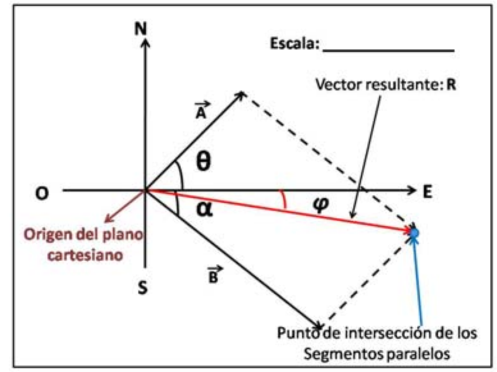


Figura 1.19: Vector resultante.

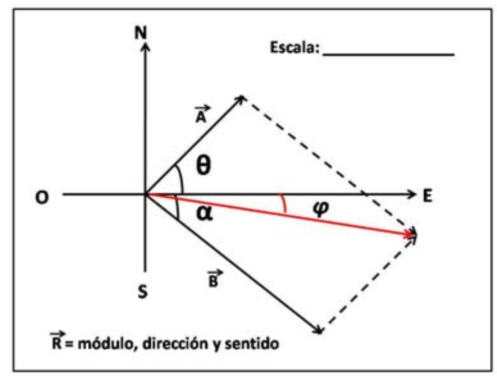


Figura 1.20: Resultado de la suma de los dos vectores.

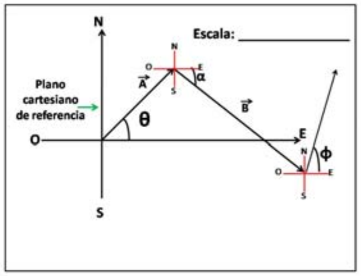


Figura 1.21: Vectores dibujados uno a continuación del otro

1.8.2. Actividad 1.16

Dados los siguientes vectores,

$$\vec{E} = 50\ m,\ 30^\circ\ al\ sur\ del\ este$$

$$\vec{F} = 40\ m,\ 70^\circ\ al\ sur\ del\ oeste$$

$$\vec{A} = 20\ m,\ 40^\circ\ al\ sur\ del\ oeste$$

$$\vec{G} = 60\ m,\ 20^\circ\ al\ norte\ del\ oeste$$

Sumar:

1. $\vec{E} + \vec{F} = \vec{R}$
2. $\vec{A} + \vec{G} = \vec{R}$

1.8.3. Método del polígono

Este método para sumar vectores se caracteriza porque los vectores se dibujan ***cola (punto inicial) de un vector, con la punta (punto final) del siguiente vector*** (figura 1.21). En este caso el vector resultante es el vector trazado desde ***la cola (punto inicial) del primer vector u origen del plano cartesiano hasta la punta (punto final) del último vector*** (figura 1.22).

Con respecto al módulo, se obtiene multiplicando la longitud del vector resultante por la escala utilizada. Producto de esta multiplicación se obtiene un número y su correspondiente unidad, que representa ***el módulo del vector resultante***. El producto de esta multiplicación se presenta en la misma unidad que la escala.

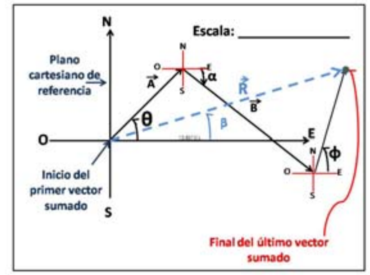


Figura 1.22: Vector resultante

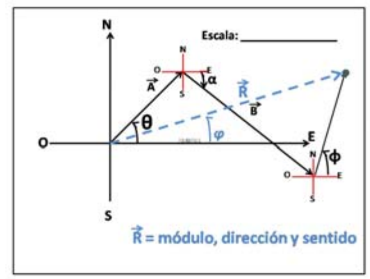


Figura 1.23: Resultados de la suma gráfica de los vectores

Con respecto a la dirección, para obtenerla debes medir el ángulo (φ) que hay entre el ***vector resultante*** y el ***eje x***, en este caso el ***eje x*** está representado por el este.

Con respecto al sentido, debes identificar, en primer lugar, el cuadrante en el que se encuentra el vector resultante. En el caso del vector que estamos trabajando, el mismo está en el primer cuadrante. En consecuencia, el sentido del vector resultante es: ***norte del este***, si se lee el ángulo con respecto al eje x (este).

Presenta los resultados. Esto implica presentar el vector resultante producto de la suma gráfica de los tres vectores sumados como corresponde, es decir, con su módulo, dirección y sentido. Para ello, puedes orientarte con el esquema mostrado en la figura 1.23.

1.8.4. Actividad 1.17

Dados los siguientes vectores,

$$\vec{C} = 100\ m,\ 60° \ \textit{al sur del este}$$

$$\vec{D} = 200\ m,\ 80° \ \textit{al sur del oeste}$$

$$\vec{E} = 150\ m,\ 30° \ \textit{al norte del oeste}$$

$$\vec{A} = 20\ m,\ 40° \ \textit{al sur del oeste}$$

$$\vec{H} = 100\ m,\ 20° \ \textit{al sur del este}$$

Sumar:

1. $\vec{C} + \vec{D} + \vec{E} = \vec{R}$
2. $\vec{D} + \vec{E} + \vec{A} + \vec{H} = \vec{R}$

1.8.5. Resta gráfica de vectores

La resta de vectores parte de la definición del ***vector opuesto*** de otro ***vector***. Por ejemplo, el vector opuesto del vector $\vec{A}$ es el vector $-\vec{A}$. Este vector opuesto se caracteriza por tener ***la misma magnitud, la misma dirección, pero sentido opuesto al vector*** $\vec{A}$. Por ejemplo, el vector opuesto del vector $\vec{A}(100\ m,\ 30°$ *al norte del oeste*), es el vector $-\vec{A}(100\ m,\ 30°$ *al sur del este*). Como vemos el vector $-\vec{A}$ tienen el mismo módulo que $\vec{A}$, en este caso 100 m; la misma dirección que $\vec{A}$, en este caso 30º; pero, el sentido opuesto a $\vec{A}$, que en este caso es al Sur del Este. Esto lo podemos ver en detalle si procedemos a hacer la representación gráfica del vector $\vec{A}$ y su vector opuesto (Figura 1.24).

1.8.6. Actividad 1.18

Dados los siguientes vectores,

$$\vec{C} = 100\ m,\ 60° \ \textit{al sur del este}$$

$$\vec{D} = 200\ m,\ 80° \ \textit{al sur del oeste}$$

$$\vec{A} = 20\ m,\ 40° \ \textit{al sur del oeste}$$

$$\vec{F} = 30\ m,\ 60° \ \textit{al norte del oeste}$$

restar:

1. $\vec{C} - \vec{D} = \vec{R}$
2. $\vec{A} - \vec{F} = \vec{R}$

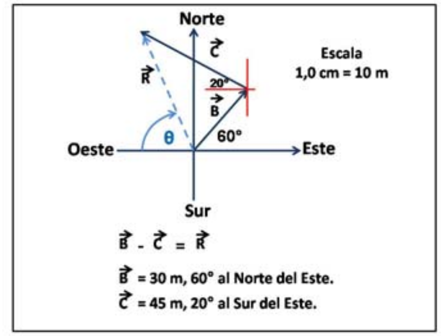


Figura 1.24: Resultado de la resta de vectores.

1.9. Descomposición de vectores en sus componentes rectangulares

El trabajo con vectores de forma gráfica se caracteriza porque, en algunas ocasiones no siempre encuentras los mismos resultados que tus compañeros, aunque lo intenten, ello se debe a que en el proceso de medición de la longitudes o de los ángulos, por ejemplo, siempre se introducen aspectos o elementos que ocasionan que los resultados no siempre sean los mismos. Pero, existe otra forma de trabajar con vectores, descomponiendo el vector en sus componentes rectangulares y en esta sección vamos a centrarnos en explicar la descomposición de vectores en sus componentes rectangulares y como trabajar con ellos usando vectores unitarios.

1.9.1. Las componentes rectangulares de un vector

Todo vector puede ser descompuesto en dos componentes llamadas componentes rectangulares. Estas componentes, cuando el vector se descompone sobre un plano, se encuentran sobre el eje horizontal (eje x) y sobre el eje vertical. Por ejemplo, representamos sobre un plano el vector $\vec{B}$ (figura 1.25):

Como vemos en la Figura 1.25, el vector $\vec{B}$ puede descomponerse en dos componentes rectangulares. Una componente se encuentra sobre el eje horizontal y se conoce como vector $\vec{B}_x$. La otra componente se encuentra sobre el vertical y se conoce como vector $\vec{B}_y$. Además, la figura 1.25, también nos da información sobre los módulos y las direcciones de cada uno de estas componentes.

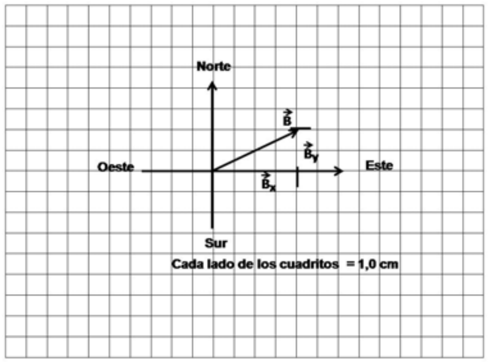


Figura 1.25: Componentes rectangulares de un vector.

$$\mid \vec{B}_x \mid = 4,0\ cm \tag{1.42}$$

$$\mid \vec{B}_y \mid = 2,0\ cm \tag{1.43}$$

En consecuencia, tenemos que:

$$\vec{B}_x = 4,0\ cm\ sobre\ el\ eje\ x\ en\ sentido\ positivo. \tag{1.44}$$

$$\vec{B}_y = 2,0\ cm\ sobre\ el\ eje\ y\ en\ sentido\ positivo. \tag{1.45}$$

La información sobre los vectores componentes, se puede dar de otra forma haciendo uso de los llamados vectores unitarios. Recuerda que hay un vector patrón en la dirección positiva del eje x, de módulo uno, llamado vector unitario ($\widehat{x}$) y con el signo se indica el sentido. Nos centraremos a continuación en el trabajo con vectores unitarios.

1.9.2. Vectores unitarios

Un vector unitario se utiliza para especificar una dirección en el espacio. Por ejemplo, se puede utilizar un vector unitario ($\widehat{y}$) para determinar la dirección perpendicular a esta página, que tiene una dirección dirigía hacia afuera. Podemos ver esta situación esquematizada en la Figura 1.26.

El vector unitario tiene como módulo la unidad ($\mid \widehat{y} = 1 \mid$). Por ello, se denominan vectores unitarios, ya que sólo se utilizan para especificar una dirección. Además, debemos agregar que los vectores unitarios son vectores

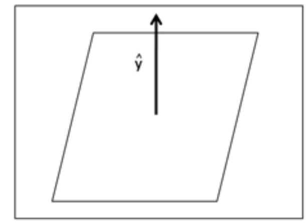


Figura 1.26: Vector en la dirección perpendicular a está página.

sin dimensiones. En consecuencia, son de gran utilidad para representar las direcciones de los ejes $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z}$.

Se utilizan símbolos como $\widehat{i}, \widehat{j}, \widehat{k}$ para representar los vectores unitarios paralelos a los ejes x, y, z, respectivamente de un sistema de coordenadas cartesianas. También, estas direcciones se suelen representar por los símbolos: $\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{y}$. Todo lo anterior, lo hemos esquematizado en la figura 1.27.

Unido a lo anterior debemos señalar que los vectores unitarios se caracterizan por ser mutuamente perpendiculares entre sí.

Generalizando podemos señalar que los vectores unitarios, pueden especificarse, por su módulo y dirección o por sus componentes. Esquemáticamente, tenemos (Figura 1.28).

Las componentes del vector $\vec{F}$ en tres dimensiones son: $\vec{F}_x, \vec{F}_y, \vec{F}_z$. Por lo tanto, $\vec{F}$ está dada por:

$$\vec{F} = F_x\widehat{i} + F_y\widehat{j} + F_z\widehat{k} \tag{1.46}$$

En estas clases vamos a trabajar por lo pronto con vectores en un plano y no vectores en el espacio. En consecuencia, el vector $\vec{F}$ en un plano queda representado sólo por:

$$\vec{F} = F_x\widehat{i} + F_y\widehat{j} \tag{1.47}$$

Si volvemos al ejemplo inicial, donde trabajamos con el vector $\vec{B}$, podemos usar vectores unitarios para indicar la dirección del eje horizontal y la dirección del eje vertical de este vector. Esto nos permite escribir las componentes rectangulares de dicho vector como sigue:

$$\vec{B}_x = 4,0\ \widehat{x}\ cm \tag{1.48}$$

$$\vec{B}_y = 2,0\ \widehat{y}\ cm \tag{1.49}$$

Lo anterior lo podemos extender a la suma de varios vectores. Analicemos y estudiemos la siguiente situación.

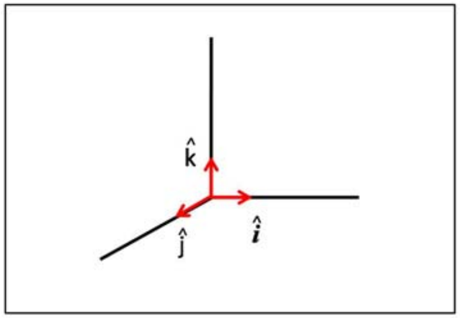


Figura 1.27: Vectores unitarios en el espacio.

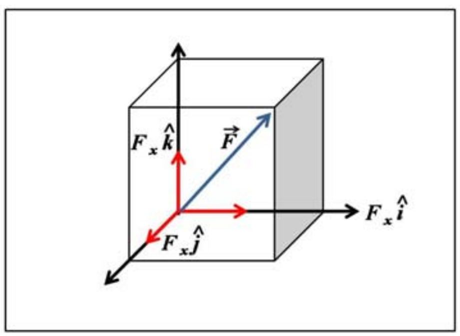


Figura 1.28: Vectores unitarios en el espacio.

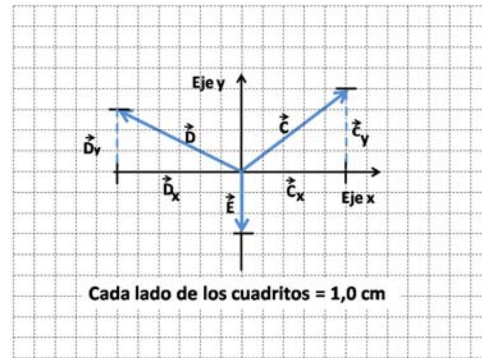


Figura 1.29: Vectores coplanares.

Sobre un plano se han representado tres vectores coplanares. Los vectores $\vec{C}$, $\vec{D}$ y $\vec{E}$ (Figura 1.29). Para encontrar el vector resultante de la suma de esos tres vectores, lo más práctico es trabajar con los vectores componentes de cada vector. Veamos.

En cuanto al módulo del vector resultante

Se descompone cada vector en sus componentes rectángulares. Para evitar confusiones construimos una tabla de dos columnas, en una de las columnas colocamos las componentes rectangulares horizontales (eje x) de cada vector, y en la otra columna colocamos las componentes rectangulares verticales (eje y) de cada vector.

Componentes horizontales (eje x)	Componentes verticales (eje y)
$\vec{C}_x = 5,0\,\hat{x}\,cm$	$\vec{C}_y = 4,0\,\hat{y}\,cm$
$\vec{D}_x = -6,0\,\hat{x}\,cm$	$\vec{D}_y = 3,0\,\hat{y}\,cm$
$\vec{E}_x = 0,0\,cm$	$\vec{E}_y = -3,0\,\hat{y}\,cm$

Al sumar las componentes horizontales (eje x) de cada uno de los vectores tenemos que el vector resultante en el eje horizontal es:

$$\vec{R}_x = -1,0\,\hat{x}\,cm \tag{1.50}$$

Al sumar las componentes vertciales (eje y) de cada uno de los vectores tenemos que el vector resultante en el eje vertical es:

$$\vec{R}_y = 4,0\,\hat{y}\,cm \tag{1.51}$$

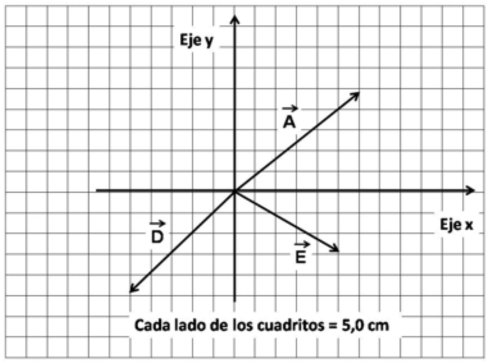


Figura 1.30: Situación 1.

Esta información nos permite conocer el módulo del vector resultante $\vec{R}$ haciendo uso del conocido teorema de Pitágoras. $\mid \vec{R} \mid = \sqrt{(\vec{R}_x)^2 + (\vec{R}_y)^2} = \sqrt{(-1,0cm)^2 + (4,0)^2} = 4,1\ m$.

En cuanto a la dirección y el sentido del vector resultante

El ángulo entre el vector resultante y el eje horizontal está dado por:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{- \mid \vec{R}_y \mid}{\mid \vec{R}_x \mid}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-1,0}{4,0}\right) = -14° \tag{1.52}$$

El vector resultante se encuentra en el segundo cuadrante 14° con respecto al eje horizontal. Esto nos señala que el sentido de este vector será entonces al ***Norte del Oeste***.

$$\vec{R} = 4,1\ cm,\ 14°\ \textit{al norte del oeste} \tag{1.53}$$

1.9.3. Actividad 1.19

Encontrar el vector resultante en cada una de los esquemas presentados a continuación (situación 1 y 2), a través de las descomposición de cada vector en sus componentes rectangulares.

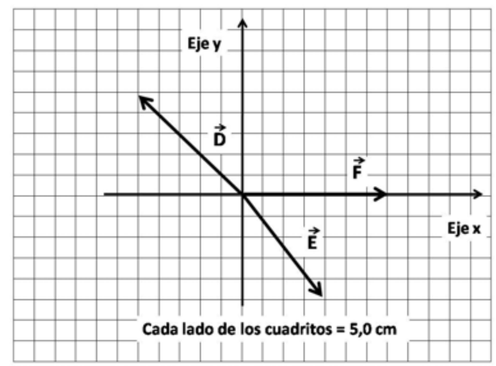


Figura 1.31: Situación 2

2

Cinemática

En esta sección nos centraremos a estudiar los conceptos fundamentales en la descripción de los movimientos de los cuerpos. Estos conceptos son la posición, el desplazamiento, la velocidad y la aceleración. Estos conceptos nos ayudaran en la descripción de el movimiento uniforme, el movimiento uniformemente acelerado (el movimiento en caída libre) y la combinación de los dos movimientos anteriores (el uniforme y el uniformemente acelerado). En consecuencia, pretendemos que al finalizar la misma seas capaz de:

1. Describir en forma clara los conceptos básicos que sustentan el estudio del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

2. Entender que el movimiento de caída libre es un ejemplo de movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

3. Plantear las diferencias que existen entre el movimiento rectilíneo uniforme y el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

4. Conocer que el movimiento parabólico es un ejemplo de la combinación del movimiento rectilíneo uniforme y el movimiento rectílineo uniformemente acelerado, perpendicular al anterior.

2.1. La posición como un vector

En Física, para determinar el lugar donde se encuentra una masa o un punto cualquiera, se utiliza una magnitud Física conocida como: la Posición. Esta magnitud Física se caracteriza por ser un vector que generalmente se representa por una letra $\boldsymbol{r}$ con una flecha arriba ($\vec{r}$). La unidad, en el Sistema internacional (SI) para la magnitud o módulo de la posición es el metro y se representa simbólicamente por una letra $\boldsymbol{m}$ minúscula. En el mapa conceptual (Figura 2.1) te presentamos un resumen de los aspectos fundamentales del vector posición.

Figura 2.1: Plano cartesiano

Función del vector posición

El vector posición se usa para determinar el punto o lugar donde se encuentra un cuerpo o masa con respecto a un punto de referencia.

2.1.1. Punto de referencia

Arriba hemos señalado que la posición de un punto, lugar o cosa se da con respecto a un punto de referencia. Lo anterior señala que es importante, saber lo que es un punto de referencia.

En la vida diaria un punto de referencia puede definirse como el sujeto, objeto o cosa situado en un punto específico y a partir del cual se inicia la descripción del punto donde se encuentra el objeto que se quiere localizar. A partir de ese punto de referencia das orientaciones conocidas por el hombre común (***adelante − atrás***; ***izquierda − derecha***; ***arriba o debajo***; ***norte, sur, este y oeste***).

Cuando se trata de una sola dimensión se debe escoger un punto del espacio que será tomado como referencia y que se denomina origen de las abscisas. Se traza mentalmente una recta que pasa por el punto de referencia y por el punto a localizar. Esa recta se orienta dando dos sentidos, el positivo y el negativo. Se divide la recta en partes iguales y la magnitud de la división más pequeña se llama precisión. El sistema internacional nos asigna un patrón internacional y múltiplos y submúltiplos. Se fabrica un vector que es el segmento orientado (que se representa por una flecha) cuyo origen es el origen de las abscisas y el extremo de la flecha la posición que queremos localizar (ver figura 2.2).

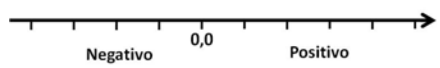


Figura 2.2: Sentido positivo y sentido negativo sobre una recta.

2.1.2. La posición de un objeto desde la física

En física se determina la posición de objetos, masas, puntos, etc., que se encuentran sobre una línea recta o sobre un plano. Para ello trazas una flecha que tiene como origen, el origen de tu sistema de referencia y como punta el punto donde está el objeto. Necesitas pues dos puntos distintos, el origen y el punto posición del objeto. Para dar esas dos informaciones necesitas un objeto matemático que te permita dar dos informaciones y el mejor candidato es un vector que se representa con una flecha, en nuestro caso. Además, es necesario que sepas como obtener el vector posición de un objeto, masa, punto, etc., ya sea que puedes hacerlo con sólo definir una dimensión, ya sea que necesites dos, tres, cuatro, etc. Lo que si es cierto es que tu realidad en la naturaleza te permite solo hacerlo hasta tres dimensiones y usar la percepción que te dan tus sentidos. Por último es necesario señalar que un sistema de referencia en física, más una balanza constituyen, en una primera aproximación lo que se considera como un observador en física (ver figura 2.3).

Un Sistema de referencia es un sólido construido con tres reglas y un reloj. La posición de una partícula en el espacio es determinada por su posición que una función del tiempo.

La posición de puntos sobre una línea recta

Al dar la posición de un cuerpo que se encuentra sobre una línea recta muchas veces se olvida que la posición es un vector y que por lo tanto se puede representar por una flecha y que, requiere que se estipule claramente el módulo, la dirección y el sentido de la misma. Por ejemplo, en la Figura 2.4, presentamos cuatro cuerpos colocados cada uno en posiciones distintas sobre una línea recta. ¿Cómo darías la posición de cada cuerpo?

Te ayudaremos un poco, el vector posición del punto P_1 es el siguiente,

$$\vec{r}_1 = -8,0\, m, \ sobre\ el\ eje\ x \tag{2.1}$$

Donde, ***8,0 m*** es el módulo, el signo negativo indica que este número se encuentra en el sentido negativo del eje horizontal (eje x). En otras palabras, indica el sentido a partir del origen escogido. ***sobre x*** indica ***la dirección***.

Este vector, también se puede representar,

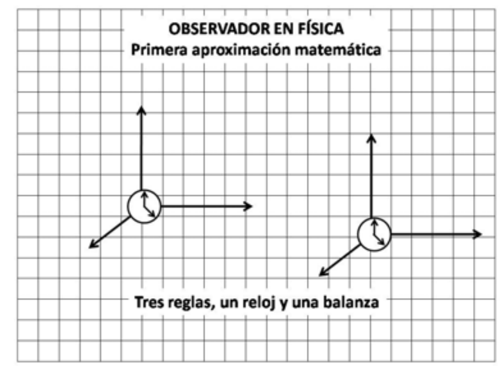


Figura 2.3: Observador en física.

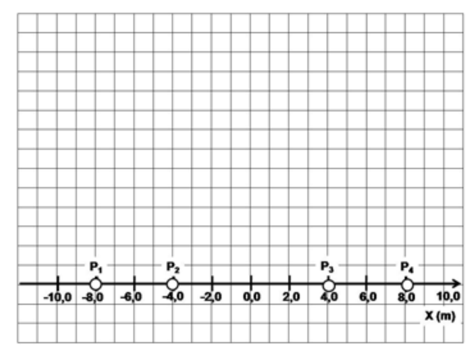


Figura 2.4: Puntos localizados sobre una línea recta

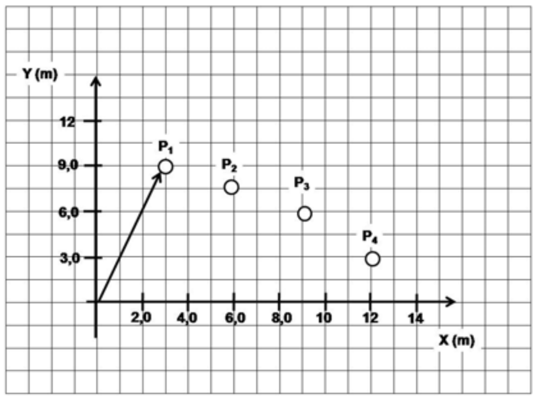


Figura 2.5: Puntos sobre un plano.

$$\vec{r}_1 = -8,0\,\widehat{x}\,m \qquad (2.2)$$

Donde $\widehat{x}$ es un vector patrón, en la dirección del eje horizontal (eje x), de módulo uno, llamado vector unitario y con el signo se indica el sentido. Más adelante te daremos más información sobre los vectores unitarios. Por lo pronto te podemos decir que para indicar la dirección sobre el eje vertical (eje y) el vector unitario se escribe $\widehat{y}$.

A partir de la información proporcionada en la Figura 2.4 completa los espacios en blanco a continuación.

- La Posición del punto P_2 está dada por $\vec{r}_2 =$ ____________________.
- La Posición del punto P_3 está dada por $\vec{r}_3 =$ ____________________.
- La Posición del punto P_4 está dada por $\vec{r}_4 =$ ____________________.

La posición de puntos sobre un plano

En el plano cartesiano mostrado en la Figura 2.5 se muestran cuatro puntos (P_1, P_2, P_3 y P_4). Traza para cada punto los vectores posición. Por ejemplo, traza un segmento que tiene como punto de partida el punto de referencia (origen de coordenadas) del plano cartesiano y que termine en el punto P_1. Repite lo anterior para los puntos P_2, P_3 y P_4 respectivamente.

El vector posición del punto P_1 ($\vec{r}_1$), queda determinado a partir de las coordenadas:(3,0;9,0) m. Con esta información se puede obtener el módulo del vector posición utilizando el teorema de Pitágoras: $|\,\vec{r}_1\,| = \sqrt{(3,0)^2 + (9,0)^2} = 9,5\ m$. En cuanto a la dirección y el sentido es de 71º con respecto al eje x positivo. En consecuencia, el vector posición del punto P_1 es $\vec{r}_1 = 9,5\,m,\ 72°$ *con respecto al eje x positivo.*

Otra forma de obtener la posición de un punto sobre un plano es a través de la suma de las componentes rectangulares de cada vector. En este caso el vector posición $\vec{r}_1$ puede estar dado por,

$$\vec{r}_1 = (3,0\,\widehat{x}; +9,0\,\widehat{y};)m. \qquad (2.3)$$

A partir de la información proporcionada hasta el momento y en la Figura 2.5 completa los espacios en blanco a continuación.

- La Posición del punto P_2 está dada por $\vec{r}_2 =$ ____________________.
- La Posición del punto P_3 está dada por $\vec{r}_3 =$ ____________________.
- La Posición del punto P_4 está dada por $\vec{r}_4 =$ ____________________.

Por último es necesario que conozcas que para conocer la posición de por ejemplo, un punto en el espacio, en física no podemos referirnos a una o a dos distancias. En este caso tres distancias son necesarias, se llaman las coordenadas del punto. Esta propiedad se denomina ***tri dimensionalidad***. Tres coordenadas definen completamente la posición de un punto con respecto a un cuerpo sólido llamado sistema de coordenadas. Por el momento, te estamos introduciendo en el estudio de los fenómenos físicos relacionados con la cinemática y por lo tanto no tocaremos este aspecto, pero te hacemos saber que debes prepararte para ello.

2.1.3. Actividad 2.1

1. En la Figura 2.6 se representa la posición de tres cuerpos sobre una línea recta. A partir de la información mostrada en la figura completa los espacios en blanco a continuación.
   a) La posición del cuerpo en el punto $P_1 =$ ____________________.
   b) La posición del cuerpo en el punto $P_2 =$ ____________________.
   c) La posición del cuerpo en el punto $P_3 =$ ____________________.
2. En el plano de la Figura 2.7, encontramos dos puntos P_1 y P_2 que representan la posición de un cuerpo en puntos distintos.
   a) Dibujar el vector posición del cuerpo en los puntos P_1 y P_2 a partir del punto de origen (0,0).
   b) La posición del cuerpo en el punto $P_1 =$ ____________________.
   c) La posición del cuerpo en el punto $P_2 =$ ____________________.

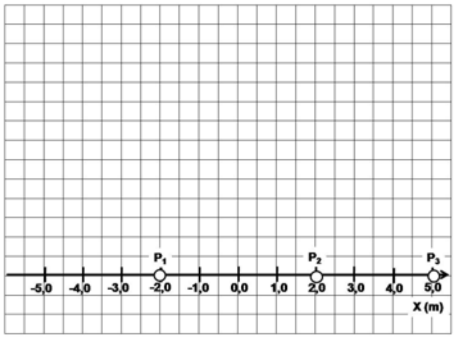


Figura 2.6: Puntos sobre una línea recta

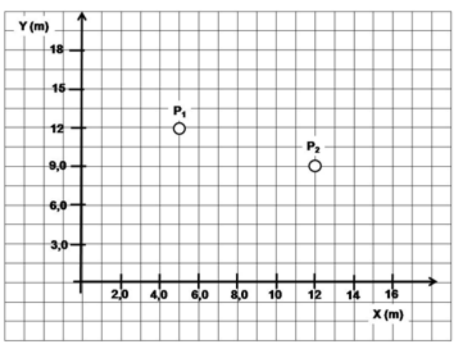


Figura 2.7: Puntos sobre un plano

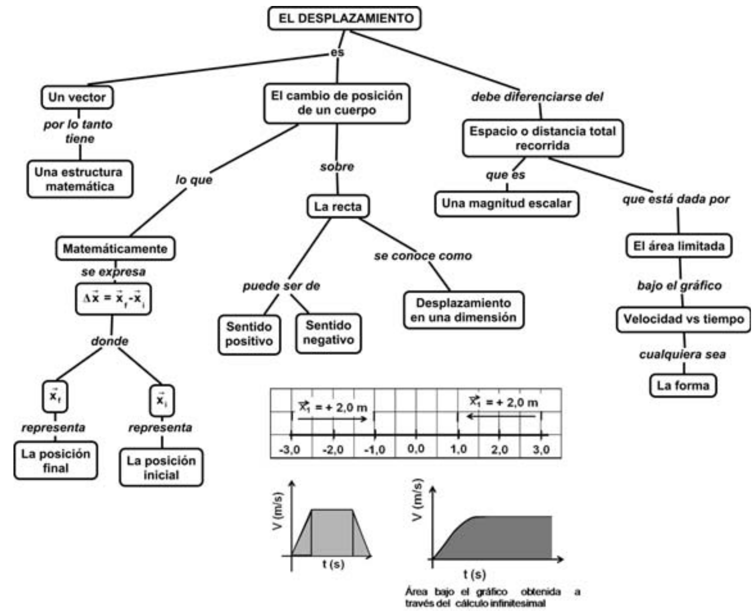


Figura 2.8: El desplazamiento como vector.

2.1.4. El vector desplazamiento

El cambio de posición de un cuerpo,se conoce como ***desplazamiento***. Este vector permite establecer el cambio de posición de un cuerpo, con respecto a un punto de referencia, es decir, qué distancia se ha desplazado el cuerpo y en que dirección, con respecto a un punto de referencia.

Lo anterior nos dice que cuando, un cuerpo cambia de posición recorre cierta distancia en una dirección determinada. La mayoría de las veces, al hombre común no le interesa conocer la distancia recorrida, ni la dirección seguida por una persona al cambiar de posición. Pero al Físico, cuando describe el cambio de posición de un cuerpo, si requiere de por lo menos estas dos informaciones (distancia recorrida y dirección, incluyendo sentido). Las características básicas del desplazamiento, como magnitud Física, son presentadas en el mapa conceptual mostrado en la figura 2.8.

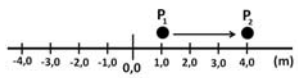


Figura 2.9: Desplazamiento del punto P_1 al punto P_2.

2.1.5. El desplazamiento de un cuerpo sobre una línea recta

En la descripción del cambio de posición de un cuerpo siempre debes tener presente que es indispensable tener un punto de referencia. Por ejemplo, vamos a determinar el desplazamiento de un cuerpo sobre una línea recta. En este caso el punto de referencia que utilizaremos será el punto 0,0. Cuando hacemos eso ya todos los puntos de la recta no son iguales, el punto escogido denominado origen es especial pues es el punto de referencia. Pero, es especial para el que realiza el análisis y esa referencia puede cambiar de persona a persona.

Situación 1

En la figura 2.9, se representa el cambio de posición de un cuerpo sobre una línea recta. El cuerpo pasa del punto P_1 al punto P_2.

- La posición inicial ($\vec{r}_1$) del cuerpo es, $\vec{r}_1 = +1,0\ m$ sobre la línea recta.
- La posición final ($\vec{r}_2$) del cuerpo es, $\vec{r}_2 = +4,0\ m$ sobre la línea recta.

El desplazamiento ($\Delta\vec{r}$) del cuerpo al pasar de la posición P_1 a la posición P_2, se obtiene a partir de la expresión: $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, lo que implica que como vector se requiere para determinarlo un módulo, una dirección y un sentido. Como el cuerpo se desplaza sobre una línea recta, tenemos que el módulo del desplazamiento está dado por el módulo de la suma algebraica. Daría igual módulo si el cuerpo se desplazara de la posición inicial P_2 a la posición final P_1. Sin embargo el vector $\Delta\vec{r}$ no es lo mismo, pues sería en el primer caso + 3,0 m sobre la línea recta y en el segundo caso − 3,0 m sobre la línea recta en la dirección horizontal como vemos a continuación,

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = +4,0\ m - 1,0\ m = +3,0\ \hat{x}\ m \tag{2.4}$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = +1,0\ m - 4,0\ m = -3,0\ \hat{x}\ m \tag{2.5}$$

Situación 2

En la figura mostrada a continuación, se representa el cambio de posición de un cuerpo sobre una línea recta. El cuerpo pasa del punto P_1 al punto P_2 ¿Cuál es el desplazamiento del cuerpo representado en la figura 2.10?

- La posición inicial ($\vec{r}_1$) del cuerpo es, $\vec{r}_1 = -3,0\ m$ sobre la línea recta.

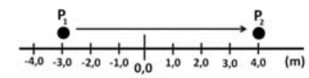


Figura 2.10: Desplazamiento del punto P_1 al punto P_2.

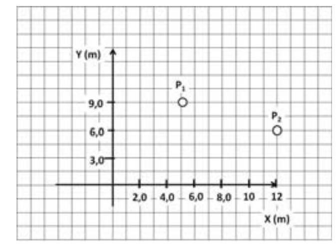


Figura 2.11: Puntos sobre un plano.

- La posición final ($\vec{r}_2$) del cuerpo es, $\vec{r}_2 = +4,0\ m$ sobre la línea recta.

El desplazamiento ($\Delta\vec{r}$) del cuerpo al pasar de la posición P_1 a la posición P_2, se obtiene a partir de la expresión:$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, lo que implica que como vector se requiere para determinarlo un módulo, una dirección y un sentido. Como el cuerpo se desplaza sobre una línea recta, tenemos que el módulo del desplazamiento está dado por el módulo de la suma de tipo algebraica, sin embargo, lo más relevante es el punto final y el punto inicial; la dirección la conocemos pues corresponde a la línea recta y en cuanto al sentido del desplazamiento está dado por el signo de la diferencia algebraica. En resumen, tenemos la regla,

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = +4,0\ m - (-3,0)\ m = +4,0\ m + 3,0\ m = 7,0\ \hat{x}\ m \tag{2.6}$$

Situación 3

Un cuerpo se desplaza en un plano del punto P_1 al punto P_2. A partir de la información mostrada en la figura 2.11:

1. Dibuja el vector posición del cuerpo en los puntos P_1 y P_2.
2. Dibuja el vector desplazamiento de P_1 a P_2
3. Determinar las coordenadas del vector posición que representa al punto P_1 en ese sistema.

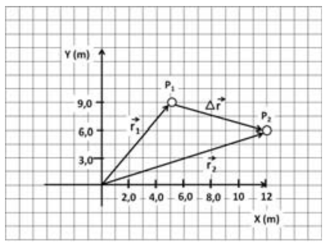


Figura 2.12: Dibujando el vector desplazamiento.

4. Determinar las coordenadas del vector posición que representa al punto P_2 en ese sistema.

5. Determinar el desplazamiento del cuerpo del punto P_1 al punto P_2.

Con respecto a los puntos 1 y 2

En la figura 2.12 se representa el vector posición ($\vec{r}_1$) y el vector posición ($\vec{r}_2$), así como también el vector desplazamiento ($\Delta\vec{r}$).

Con respecto al punto P_1

El vector posición ($\vec{r}_1$) del punto P_1, queda determinado a partir de las coordenadas: (5,0; 9,0). Estas coordenadas permiten obtener el módulo del vector posición ($\vec{r}_1$), usando el teorema de Pitágoras: $\mid \vec{r}_1 \mid = \sqrt{(5,0)^2 + (9,0)^2} = 10\ m = 1,0\ x\ 10^1\ m$. En cuanto a la dirección, se obtiene midiendo el ángulo entre el eje horizontal y el vector posición ($\vec{r}_1$), lo que nos dice que el ángulo es de 67º. Por lo tanto, el vector posición del punto P_1 es $\vec{r}_1 = 10\ m/\ 67°$ con respecto al eje x positivo.

Con respecto al punto P_2

El vector posición ($\vec{r}_2$) del punto P_2 queda determinado a partir de las coordenadas: (12,0, 6,0). Estas coordenadas permiten obtener el módulo del vector posición $\vec{r}_2$, que es: $\mid \vec{r}_2 \mid = \sqrt{(12)^2 + (6,0)^2} = 13\ m = 1,3\ x\ 10^1\ m$.

El ángulo lo obtenemos de la misma manera que para el vector posición ($\vec{r}_1$). Por lo tanto, el vector posición del punto P_2 es $\vec{r}_2 = 13\ m/\ 36°$ con respecto al eje x positivo.

Con respecto al desplazamiento

El desplazamiento requiere un módulo, una dirección y un sentido. Por lo tanto, a continuación describiremos cómo se obtiene cada uno de ellos:

Vimos que el desplazamiento total se puede obtener por varios caminos. Hay caminos más fáciles de analizar. Por ejemplo, el camino a través de los ejes de coordenadas cartesianas nos permite utilizar relaciones conocidas. El módulo del desplazamiento en este caso requiere conocer la distancia recorrida por el cuerpo, tanto en el eje vertical (eje y), cómo en el eje horizontal (eje x). Para ello, en la Figura 2.12 tenemos que la variación de la distancia en el eje vertical esta dada por la expresión: $\Delta y = y_2 - y_1$. Lo que nos permite encontrar el desplazamiento en el eje y $\Delta y = 9,0\ m - 6,0\ m = 3,0\ m$. En el eje x el desplazamiento viene dado por: $\Delta x = 12\ m - 5,0\ m = 7,0\ m$.

A partir de sus coordenadas el vector desplazamiento puede ser expresado como $= 7,0\ \widehat{x}\ m - 3,0\ \widehat{y}\ m$. A través de estas coordenadas podemos obtener el módulo del vector desplazamiento (($\Delta\vec{r}$)), el cual es $\mid \vec{r}_2 \mid = \sqrt{(7,0)^2 + (3,0)^2} = 7,6\ m$. Su orientación la encontramos midiendo con un transportador de la misma manera que lo hemos hecho con los otros vectores posición y nos da un valor de 294º. Por lo tanto el vector desplazamiento queda expresado de la siguiente manera $\vec{r}_2 = 7,6\ m/\ 294°$, con respecto al eje x positivo.

Otra manera de hacerlo es primero rotando el eje Ox hasta que coincida con la recta que soporta el vector. Este ángulo de rotación es de 294 °. La rotación no cambia la longitud del vector. Después se mide el valor del módulo del vector y se encuentra 7,6 m.

2.1.6. Diferencia entre desplazamiento y distancia total recorrida

En Física es necesario diferenciar entre desplazamiento y distancia total recorrida (o espacio total recorrido). Sabemos que el desplazamiento depende de un punto inicial y un punto final. Por ejemplo, imagina que vas de tu casa a un centro comercial y que para ello recorres una distancia de 2,0 km e inmediatamente después, regresas a tu casa. Podemos decir, entonces, que la distancia total que recorriste fue de 4,0 km, pero, tu desplazamiento fue de 0,0 km. ¿Por qué el desplazamiento total fue de 0,0 km? Ello es debido a que el desplazamiento es un vector y es la diferencia entre la posición final y la posición inicial. En este caso, la posición inicial fue la misma que la posición final, luego su diferencia es cero.

Por ejemplo, si un ciclista da una vuelta completa a una pista circular de radio r (como se muestra en la figura 2.13) partiendo de A y llegando al mismo punto, la distancia que este ha recorrido estará dada por el perímetro de una circunferencia que es $2\pi r$, visto desde el punto A. Ahora, si situamos un marco de referencia en A para ver la posición inicial y final del recorrido del ciclista nos daremos cuenta que coinciden, y por ende, no existe un desplazamiento total.

2.1.7. Actividad 2.2

1. ¿Cuál es el desplazamiento del cuerpo al ir de P_1 a P_2, según lo descrito en la figura 2.14?

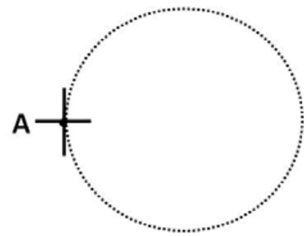


Figura 2.13: Una vuelta completa, comienza en el punto A y termina en el punto A.

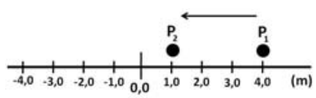


Figura 2.14: Desplazamiento en una dimensión.

2. Un cuerpo se desplaza en un plano del punto P_1 al punto P_2. A partir de la información mostrada en la figura 2.15.

   a) Dibuja el vector posición del cuerpo en los puntos P_1 y P_2.

   b) Dibuja el vector desplazamiento.

   c) Determinar el vector posición del punto P_1.

   d) Determinar el vector posición del punto P_2.

   e) Determinar el desplazamiento del cuerpo del punto P_1 al punto P_2.

2.2. La trayectoria o camino seguido por un cuerpo al cambiar de posición

Cuando eras niño (a) y ahora de adolescente, muchas veces has observado el camino que siguen las hormigas desde el lugar donde encuentran comida (un trozo pequeño de dulce, un insecto muerto, etc.) hasta su casa. Si se colocará, por ejemplo, un sistema de referencia con origen sobre el trozo de dulce, que sirve de comida a las hormigas, podríamos dibujar el camino seguido por las hormigas de regreso a su casa con comida. Este camino seguido se traza por los distintos cambios de posición de las hormigas al ir del lugar donde está la fuente de comida y su casa.

Ahora imagina que desde un helicóptero observas los cambios de posición de un automóvil que va por una carretera (Ver Figura 2.16). Los distintos cambios

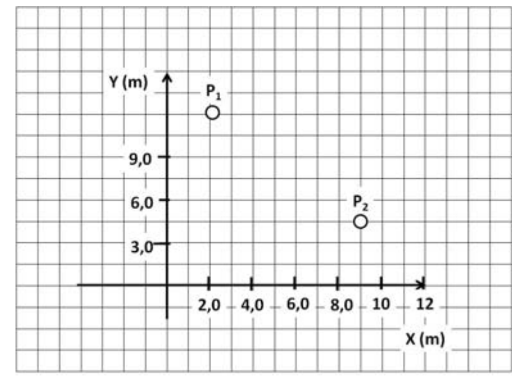


Figura 2.15: Desplazamiento de una partícula sobre un plano.

de posición del automóvil, al desplazarse a lo largo de la carretera, describen el camino seguido o trayectoria del automóvil desde el inicio de su recorrido. Traza un sistema de referencia cuyo origen coincida con el inicio de la carretera y a partir de allí traza distintos vectores posición hasta la posición actual del automóvil.

En Física, la trayectoria es un elemento muy esencial en la descripción de los movimientos de los cuerpos, pues permite conocer, donde estuvo el cuerpo (pasado), donde está el cuerpo (presente) y donde estará el cuerpo (futuro), siempre y cuando se conozca el tipo de movimiento que lleva el cuerpo. Esto último, como ya hemos dicho es un tema que será tratado más adelante. Ahora mismo sólo nos interesa la trayectoria.

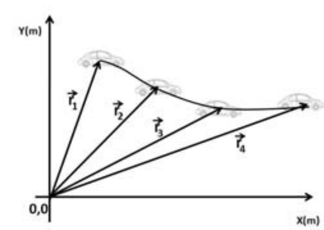


Figura 2.16: Trayectoria de un automóvil en movimiento.

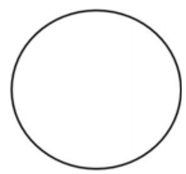


Figura 2.17: Trayectoria circular.

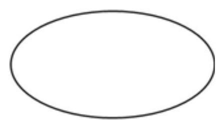


Figura 2.18: Trayectoria elíptica.

En Física se suele asociar el nombre de algunos movimientos al tipo de trayectoria seguida, por lo que más adelante encontrarás que estudiarás los siguientes movimientos, con los siguientes nombres: Movimiento rectilíneo uniforme y Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

2.2.1. Trayectoria en línea recta

Esta es la trayectoria más común. Todos hemos visto, en algún momento en nuestra vida, un movimiento en línea recta que es cuando vemos que un cuerpo se desplaza y que el camino seguido por el mismo describe una línea recta.

2.2.2. Trayectoria curvilínea

Algunas de las curvas que pasamos a mostrarte son muy conocidas y como ya te hemos mencionado arriba se suele asociar el nombre de algunos movimientos con la forma de su trayectoria. Por lo que podemos hacer las siguientes asociaciones entre la trayectoria y el tipo de movimiento:

Trayectoria circular

Esta trayectoria se asocia al movimiento circular uniforme (Ver figura 2.17).

Trayectoria elíptica

Con respecto a esta trayectoria tenemos que los planetas alrededor del Sol se mueven en trayectorias elípticas. (Ver figura 2.18).

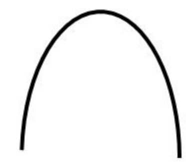


Figura 2.19: Trayectoria parabólica.

Trayectoria parabólica

En lo referente a esta trayectoria, tenemos asociada a la misma un movimiento muy natural que es el movimiento de los cuerpos sobre la superficie terrestre, en este caso es el llamado movimiento de proyectiles (Ver figura 2.19).

2.2.3. Actividad 2.3

Describa el tipo de trayectorias que observa para los eventos que le vamos a enseñar a continuación. Si es rectilínea escriba la letra A sobre la raya; si es circular escriba la letra B sobre la raya; si es elíptica escriba la letra C sobre la raya; y si es parabólica escriba la letra D sobre la raya; F si no la conoces. Realice esta actividad de manera individual.

1. La trayectoria de la tierra alrededor del sol ____________.
2. La bola golpeada con un bate por un jugador, desde el plato hasta el jardín central de un estadio de béisbol ____________.
3. Un corredor de 100 m planos ____________.
4. Una piedra atada a un cordón dando vueltas ____________.
5. Una bala disparada verticalmente ____________.
6. Una piedra incrustada en el borde de una llanta de auto ____________.

2.2.4. ¿Qué es el movimiento?

En este apartado analizaremos y discutiremos contigo los conceptos esenciales para la comprensión del concepto movimiento (velocidad).

Una pelota de fútbol va de un lado del estadio a otro, dicha pelota se ha movido porque hemos visto que a medida que transcurre el tiempo la posición ha cambiado, pero ¿cómo sabes que hubo un desplazamiento neto? Hay desplazamiento si hay cambio de posición, sin embargo, el desplazamiento neto puede ser cero pues al sumar vectores podemos obtener un vector suma igual a cero. Si la pelota fue de un extremo del campo de juego al otro hubo cambio de posición, durante cierto intervalo de tiempo, por lo tanto, el tiempo es importante. *El movimiento de dicha pelota es un fenómeno Físico y parece que todo proceso Físico tiene lugar en el espacio y en el tiempo. Esto resulta de la simple constatación de que en todos los dominios de los fenómenos Físicos cada ley comporta implícita o explícitamente relaciones espacio-temporales: distancia e intervalos de tiempo.*

Lo anterior señala que cuando hay un desplazamiento (representado por cambio de posición $\Delta\vec{r}$, ya que delta (Δ) representa cambio y el vector ($\vec{r}_1$) la posición), en Física necesariamente existe una variación en el tiempo (representado por Δt). *Los intervalos de tiempo se miden con relojes y su propiedad fundamental es que se basan en un movimiento periódico. En geometría podemos tener cambio de posición sin el tiempo (representado por una foto, que congela el tiempo, en la que podemos ver simultáneamente las distintas posiciones de un objeto).* ¿Tienes alguna duda con respecto al hecho de que cambió el tiempo? ¿Puede una persona físicamente estar en dos lugares distantes entre sí al mismo tiempo? Hasta estos momentos no, por lo tanto es necesario para comprender lo que es movimiento comprender que es el tiempo.

2.2.5. Velocidad

Para comenzar te daremos algunos datos o información general sobre la velocidad. En primer lugar, la velocidad es un vector y como tal, tiene módulo, dirección y sentido. En segundo lugar, la unidad de velocidad en el sistema internacional es el metro por segundo (m/s). Por último, es necesario que conozcas que el módulo de la velocidad se conoce como rapidez. A continuación te presentamos un pequeño resumen del concepto velocidad en forma de mapa conceptual, el cual es mostrado a continuación (figura 2.20).

Como ya hemos señalado en el mapa conceptual anterior, la velocidad de un cuerpo está dada por el desplazamiento del cuerpo entre el intervalo de tiempo que le tomó dicho desplazamiento.

Esto se expresa de la siguiente forma: $\vec{v} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta\vec{t}}$. Pero, con el objetivo de que comprendas y manejes lo anterior pasaremos a analizar el movimiento rectilíneo de un cuerpo representado gráficamente (figura 2.21). Queremos saber la velocidad desde el punto de partida (punto de origen) hasta los 140,0 s. En primer lugar, debemos determinar el módulo del desplazamiento del cuerpo que está dado por la expresión:$\mid \Delta\vec{x} \mid=\mid \vec{x}_2 - \vec{x}_1 \mid$. En este caso, el módulo de la posición inicial (P_0) es 0,0 m y el módulo de la posición final (P_1) es de 70 m. Por lo tanto $\mid \Delta\vec{x} \mid = 70$ m.

Dicho desplazamiento se realizó en 140,0 s. Por lo que la velocidad del cuerpo es de: 0,50 m/s, en el sentido positivo de la recta escogida como soporte del movimiento lineal.

A continuación procederemos a explicarte la diferencia existente entre rapidez y velocidad. Además, caracterizaremos lo que es rapidez media o promedio, rapidez instantánea y velocidad media y velocidad instantánea.

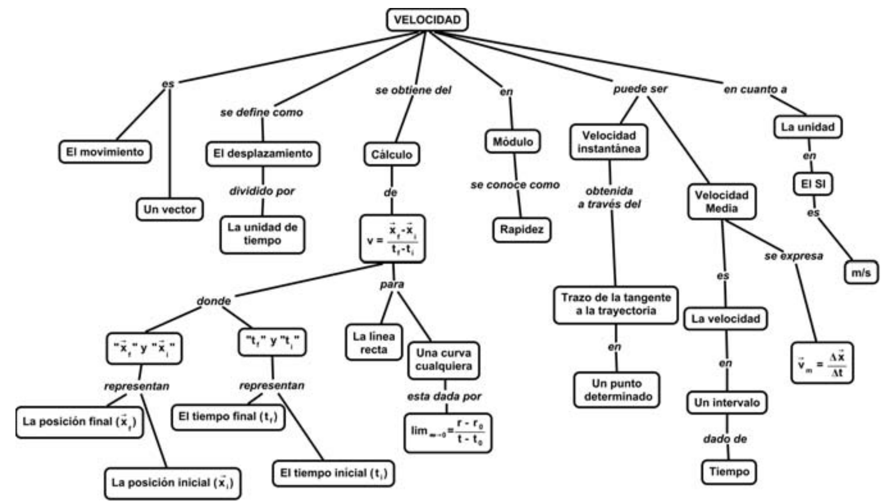


Figura 2.20: El concepto velocidad desde la física

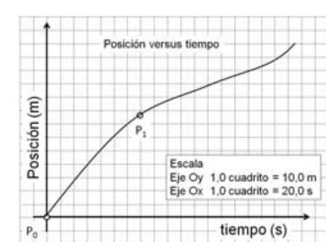


Figura 2.21: Gráfico posición versus tiempo

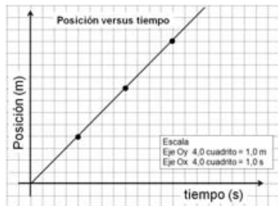


Figura 2.22: Velocidad media.

2.2.6. Velocidad Media en un movimiento rectilíneo

Si el movimiento es rectilíneo, podemos hacer la siguiente convención: $\vec{r} = x\vec{e}$, donde $\vec{r}$ es la posición (vector), $\boldsymbol{x}$ el módulo y $\vec{e}$ el vector unitario que toma sólo dos valores $+1$ para cero grados y -1 para $180°$ con respecto al eje de referencia Ox. Por ello podemos hacer un gráfico posición (vector) versus tiempo, donde el signo del eje Oy indica el sentido del vector ya que la dirección no cambia (movimiento en línea recta).

La velocidad es la variación de posición de un cuerpo ($\Delta\vec{x}$) en un intervalo o variación de tiempo (Δt). En este intervalo de tiempo el cuerpo se ha desplazado un $\Delta\vec{x}$. Por lo tanto, la velocidad está dada por la expresión: $\vec{v} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$. Cuando ($\Delta t$) es infinitesimal (es decir muy pequeño, tan pequeño como la mente puede imaginarlo), $\vec{v} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$ es la velocidad instantánea. Cuando no es el caso es la velocidad media en ese intervalo de tiempo y debemos recordar que $\Delta\vec{x}$ es el desplazamiento total o neto y es un vector (el módulo de la suma de varios vectores no es necesariamente la suma de sus módulos), por lo tanto su módulo puede no corresponder a la distancia total recorrida.

Ejemplo

Un cuerpo se mueve sobre una línea recta de una posición 2,0 m positiva, hasta una posición 8,0 m positiva, tomada a partir del origen de coordenadas, lo que le toma un tiempo total de 3,0 s.

La velocidad media está dada por (expresión 2.7):

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{(8,0\,m - 2,0\,m)\,\widehat{x}}{3,0\,s} = \frac{6,0\,\widehat{x}\,m}{3,0\,s} = 2,0\,\widehat{x}\,m/s \qquad (2.7)$$

2.2.7. Actividad 2.4

¿Cuál es la velocidad media del objeto desde el origen del tiempo hasta los 3,0 segundos en la figura 2.22?

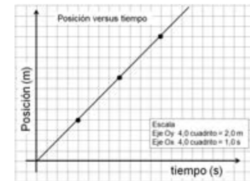


Figura 2.23: Velocidad instantánea.

2.2.8. Velocidad instantánea en un movimiento en línea recta

La velocidad instantánea se obtiene en un intervalo de tiempo muy pequeño, infinitesimal, que denotamos con «$\boldsymbol{t}$» y no con un Δt. Por ello la velocidad instantánea está dada por la expresión: $\vec{v}_{inst} = \text{lím}_{t\to 0} \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$. Esa expresión es equivalente a considerar $\Delta\vec{x}$ como el desplazamiento que es tangente a la trayectoria, dividido entre una variación de tiempo muy pequeña. Cuando tenemos una trayectoria en línea recta la tangente a la trayectoria coincide con la trayectoria en todos los puntos.

A partir de la figura 2.22, responde la siguiente cuestión: ¿Cuál es la velocidad instantánea del cuerpo a los 3,0 s? Antes que nada, debes identificar donde está el cuerpo a los 3,0 s.

De acuerdo al gráfico (figura 2.22) a los 3,0 s el cuerpo está a los 6,0 m del punto de origen sobre el eje y (o sobre una línea recta). Se debe buscar la tangente, pero en este caso es la misma a todo lo largo del recorrido, por ello se puede usar el origen de coordenadas: posición 0 y tiempo 0. La velocidad instantánea está dada entonces por la expresión 2.8:

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{(6,0\,m)\,\widehat{x}}{4,0\,s} = 2,0\,\widehat{x}\,m/s \qquad (2.8)$$

En consecuencia, la velocidad instantánea es 2,0 m/s en el sentido positivo de la recta. Surge aquí una pregunta interesante, ¿Son siempre iguales la velocidad instantánea y la velocidad media? La velocidad media no es siempre igual a la velocidad instantánea. Para el tipo de movimiento representado en las gráficas de las figuras 2.22 y 2.23, que es un movimiento uniforme en línea recta, el cual tiene como una de sus características que la velocidad no varía, no cambia se mantiene constante (tanto en módulo, dirección y sentido), la velocidad media y la velocidad instantánea son siempre iguales. Esto no es así para otro movimiento, por ejemplo, un movimiento donde el cuerpo va variando, cambiando su rapidez a cada instante. Un ejemplo, de esto lo representamos en la gráfica mostrada a continuación (figura 2.24).

Observa que en la figura 2.25, la gráfica representada muestra la variación de la posición de un cuerpo que se mueve en línea recta a lo largo del

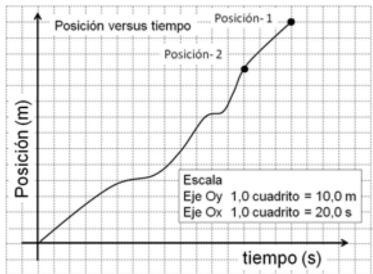


Figura 2.24: Representación gráfica de un cuerpo cuyo movimiento es variado a lo largo del tiempo.

tiempo. Con el objetivo de que reflexiones sobre el concepto que estamos estudiando te proponemos lo siguiente para que lo desarrolles en grupo (máximo tres estudiantes). Obtén la velocidad media entre los puntos Posición−1 y Posición−2; y la velocidad instantánea en los puntos Posición−1 y Posición−2.

2.2.9. Rapidez promedio en un movimiento rectilíneo

Es la rapidez a la cual iría un objeto si viajase en línea recta a rapidez constante durante todo el trayecto. Por ejemplo, si un auto va de la ciudad de Panamá a Penonomé y le tomó 3,0 horas viajar los 135 km de recorrido entre Panamá y Penonomé, su rapidez promedio sería 135/3,0 = 45 km/h. Si regresa a Panamá en 2,0 horas de viaje la rapidez promedio de ida y vuelta fue de 54 km/h. La rapidez instantánea es el módulo de la velocidad instantánea.

2.2.10. Actividad 2.5

1. El velocímetro (se debe llamar tacómetro) de un automóvil tiene un odómetro (odo, vía, metro, medición) que registra la distancia recorrida por el automóvil. Si la lectura del odómetro es cero al comienzo de un viaje y de 35 km media hora más tarde, ¿cuál es la rapidez promedio del automóvil durante su recorrido, en m/s?

2. El velocímetro de un auto que viaja hacia el norte, en línea recta, indica, durante todo el trayecto, 60 km/h. El vehículo encuentra en el camino a otro auto que viaja hacia el sur, en línea recta, durante todo el trayecto a 60 km/h. ¿Tienen ambos la misma rapidez? ¿Tienen la misma velocidad?

2.2.11. El movimiento uniforme de un cuerpo, en una trayectoria en línea recta

Nos centraremos aquí en el estudio de los cuerpos que se mueven a velocidad uniforme. Es decir, estudiaremos y describiremos el movimiento de cuerpos que se mueven distancias iguales en tiempo iguales.

Las gráficas son una herramienta muy útil en la descripción del movimiento de un cuerpo. Además de analizar los datos a través de la lectura de estos, la construcción de gráficas permite ver de manera visual y directa como se relacionan dos variables entre sí. Por ejemplo, si has leído algún periódico te habrás percatado que se presentan gráficas, con información sobre aumento del combustible por cada mes, los índices de delincuencia para distintos años, el valor promedio de la canasta básica cada cinco años, entre otros. Al observar una gráfica en un periódico podemos observar si alguna de las variables tratadas se mantiene constante en relación a la otra, o si varía de alguna manera en especial, lo mismo que podríamos interpretar al leer una tabla de datos, pero de manera más sencilla.

¿Cómo interpretar gráficas de *posición vs tiempo* y *velocidad vs tiempo* para un cuerpo que se mueve a velocidad uniforme?

Procederemos a continuación a analizar dos tipos de gráficos, pues, nos presentan información relevante para comprender el movimiento uniforme en una trayectoria en línea recta. Estos dos tipos de gráficas son: ***posición vs tiempo*** y ***velocidad vs tiempo***.

Gráficas de posición vs tiempo para un cuerpo moviéndose en línea recta con velocidad uniforme

Primero vamos a ver cómo interpretar una gráfica de posición vs tiempo para un ***cuerpo moviéndose en una trayectoria en línea recta con velocidad uniforme***: Las gráficas de posición versus tiempo para este movimiento, son gráficas lineales de la forma $y = mx + y_0$, donde $\boldsymbol{y}$ representa la variable dependiente, en este caso ***la posición*** del cuerpo; $\boldsymbol{x}$ la variable independiente, en este caso el ***tiempo***;$\boldsymbol{m}$ la pendiente del gráfico y y_0 el intercepto de la gráfica con el eje y.

Reemplazando cada una de las variables de una gráfica de $\boldsymbol{x}$ ***vs*** $\boldsymbol{t}$ en la ecuación de la línea recta obtenemos que $x = v_0\,t + x_0$. Esta es la ecuación que describe el recorrido de un cuerpo que se mueve a velocidad uniforme.

Si estudiamos cuerpos que se mueven a velocidad constante en una sola dirección y sentido podemos decir que sobre un eje solo se pueden representar dos sentidos del movimiento, uno en sentido positivo (se mueven de izquierda a derecha) y el otro en sentido negativo (se mueven de derecha a izquierda), tal como se observa en la figura 2.25.

Para el caso en el que un cuerpo que se mueva a velocidad uniforme en el sentido positivo del eje escogido, es decir hacia la derecha (en la convención

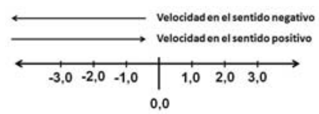


Figura 2.25: Magnitudes físicas que caracterizan el movimiento uniforme en una trayectoria en línea recta.

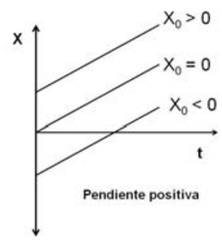


Figura 2.26: Pendiente positiva de la velocidad.

adoptada) que se representa a la derecha de su gráfica, su gráfica de posición vs tiempo puede ser de tres maneras (figura 2.26).

En la primera gráfica, contando de arriba hacia abajo, el cuerpo se analiza a partir de una posición más a la derecha que el punto de referencia, su ecuación del movimiento vendría siendo (donde x_0 es positiva) la expresión,

$$x = v_0 t + x_0 \tag{2.9}$$

¿Cómo crees que quedarían expresadas las ecuaciones para los movimientos de los cuerpos según las gráficas dos y tres, contando de arriba hacia abajo, respectivamente? Realícelo de manera individual.

Ahora, también se puede dar el caso en que el cuerpo se mueve con velocidad uniforme hacia la izquierda del eje escogido y la convención dice que el sentido de la velocidad es negativo, entonces, la gráfica posición vs tiempo para este movimiento se representa con pendiente negativa y podemos tener tres casos (figura 2.27)

Para la primera gráfica, de arriba hacia abajo, de la figura 2.27 tendremos que la ecuación del movimiento es $x = -v_0 t + x_0$, el signo menos debido a que la pendiente del gráfico es negativa y x_0 es positivo debido a que el cuerpo parte de un punto más a la derecha del punto de referencia. Ahora, cuáles crees que serán las ecuaciones de movimiento para las gráficas 2 y 3 respectivamente.

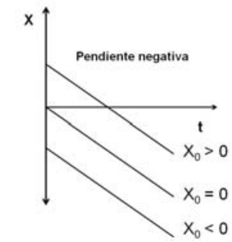


Figura 2.27: Pendiente negativa de la velocidad.

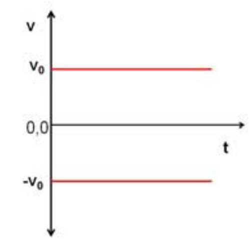


Figura 2.28: Representación gráfica de la velocidad de un movimiento uniforme.

Gráficas de *v vs t* para un cuerpo con velocidad uniforme

La gráfica velocidad vs tiempo para un cuerpo con movimiento uniforme, especificamente velocidad constante y positiva, es una gráfica lineal con pendiente cero ($m = 0$). Ahora, también se puede dar el mismo caso pero para velocidad negativa. ¿Pero cómo se representa la velocidad del cuerpo en sentido negativo? Bueno, la gráfica de velocidad vs tiempo para este movimiento se representa en la parte inferior de la figura 2.28 mientras que para la velocidad positiva constante sería la que se encuentra en la parte superior.

En este caso, como la velocidad no depende del tiempo no se puede establecer una relación entre estas dos variables, pero el área bajo el gráfico de ***velocidad vs tiempo*** si tiene un significado físico en la descripción del movimiento del cuerpo.

Lo primero es recordar que el área de un rectángulo (figura 2.29), que es el área bajo el gráfico de ***velocidad vs tiempo*** para un cuerpo que se mueve a velocidad constante y en línea recta, está representada por la ***letra A*** y está dada por la relación $A = b\ x\ h$, donde ***h*** tiene unidades de tiempo (s) y ***b*** tiene en

Figura 2.29: Area bajo el gráfico.

nuestra gráfica unidades de velocidad (mosaicos/s) para nuestro caso.

Para un caso más general utilicemos como unidades para velocidad metros por segundo (m/s).

Si ***b*** y ***h*** tienen las unidades antes mencionadas, el área bajo el gráfico tendrá las siguientes unidades,

$$A = [tiempo][\frac{longitud}{tiempo}] = [s][\frac{m}{s}] = m \qquad (2.10)$$

Entonces, el área bajo el gráfico representa la distancia recorrida por el cuerpo durante toda su trayectoria cuando el cuerpo parte del punto de referencia. Si el cuerpo no parte del punto de referencia se le suma (o resta, dependiendo del caso) un valor que corresponde al punto de partida del cuerpo (y_0).

Lo expresado hasta el momento sobre el movimiento en una trayectoria en línea recta uniforme es presentado a modo de resumen en el mapa conceptual presentado a continuación.

2.2.12. Actividad 2.6

1. Una persona observa cómo se mueve un automóvil mientras se mueve entre varios puntos cambiando de velocidad en una misma dirección. Según los datos tomados desde su marco de referencia obtuvo los datos mostrados en esta tabla 1 (Cuadro 2.1).

   a) Construya la gráfica x vs t con los datos obtenidos por un estudiante dentro de una actividad experimental.

   b) Construya la gráfica v vs t con los datos anteriores.

   c) Obtenga la distancia total recorrida por el automóvil.

   Lo anterior es una situación típica dentro del contexto de la cinemática. Reflexionemos sobre algunos aspectos importantes.

   Al momento de construir un gráfico lo primero que se hace es identificar y diferenciar la variable dependiente de la variable independiente. Para

x(m)	t(s)
0,0	0,0
12,0	3,0
18,0	6,0
18,0	9,0
9,0	12,0
21,0	15,0
21,0	18,0

Cuadro 2.1: Tabla 1

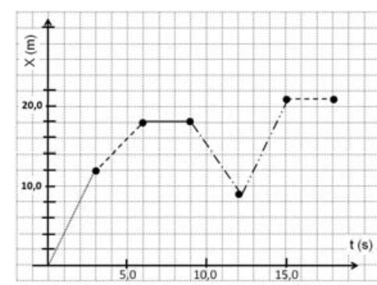


Figura 2.30: Gráfica posición vs tiempo.

nuestro caso la variable independiente es el tiempo y la dependiente la posición del cuerpo.

Al graficar como varía la posición con el tiempo obtuvimos, con la información del cuadro 2.1, la gráfica mostrada en la figura 2.30. Donde a cada intervalo se le diagramó con un tipo de línea distinto para poder diferenciarlos.

Ya sabes que la velocidad se define como $\vec{v} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$. Lo que nos permitió obtener la velocidad del cuerpo para cada intervalo y los resultados obtenidos los colocamos en la tabla 2.

Con los datos de la tabla 2 (cuadro 2.1) se construyo el gráfico de la figura 2.31.

De párrafos anteriores sabemos que el área bajo el gráfico ***v vs t*** representa la distancia recorrida por un cuerpo. Ahora, si tenemos seis intervalos diferentes procedemos a calcular el área bajo cada uno de estos intervalos de la siguiente manera:

$$A_{(0-3)s} = (3,0\ s)(4,0\ m/s) = 12\ m$$

Intervalo (s)	Velocidad (m/s)
0-3	4,0
3-6	2,0
6-9	0,0
9-12	-3,0
12-15	4,0
15-18	0,0

Cuadro 2.2: Tabla 2

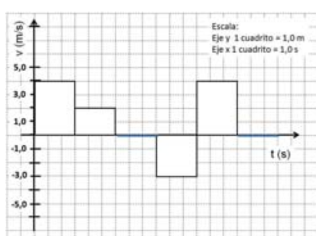


Figura 2.31: Gráfica velocidad vs tiempo.

$$A_{(3-6)s} = (3,0\ s)(2,0\ m/s) = 6,0\ m$$
$$A_{(6-9)s} = (3,0\ s)(0,0\ m/s) = 0,0\ m$$
$$A_{(9-12)s} = (3,0\ s)(3,0\ m/s) = 9,0\ m$$
$$A_{(12-15)s} = (3,0\ s)(4,0\ m/s) = 12\ m$$
$$A_{(15-18)s} = (3,0\ s)(0,0\ m/s) = 0,0\ m$$

Para calcular el área no se toman en cuenta el sentido de la velocidad del cuerpo.

Procedemos a sumar cada uno de los valores de las distintas áreas bajo el gráfico ***v vs t***, de esto obtenemos,

$$d_T = \sum A = (12 + 6,0 + 0,0 + 9,0 + 12 + 0,0)m = 39\ m \qquad (2.11)$$

Lo anterior nos permite decir que durante toda la trayectoria el automóvil recorrió 39 m.

Aclaración: recuerda que desplazamiento y distancia son dos conceptos distintos.

Otra manera de responder a esta pregunta es la siguiente:

Si sabemos que durante la trayectoria rectilínea de un cuerpo podemos relacionar la distancia que este recorre en función del tiempo si conocemos su velocidad a través de la relación $x = v_0 t$. Para cada intervalo en los cuales se determinó la posición del cuerpo determinamos la velocidad lo cual nos quedaría tal como describimos a continuación.

Durante el primer intervalo de tiempo el cuerpo se traslado del origen a 12 m hacia la derecha; en el segundo intervalo se trasladó de los 12 m a los 18 m del origen, dando como resultado un desplazamiento de 6,0 m; en el tercer intervalo el cuerpo se mantuvo en la misma posición por lo que podemos decir que no se desplazó; durante el cuarto intervalo el automóvil retrocede de los 18 m a los 9,0 m del origen de coordenadas por lo que recorrió 9,0 m más, pero en sentido contrario; durante el quinto intervalo se movió 12 m en sentido positivo (hacia la derecha) de la posición 9,0 m a 21 m; durante el sexto y último intervalo el cuerpo no se trasladó de la posición 21 m, por lo que la distancia que recorrió durante este intervalo es de 0,0 m.

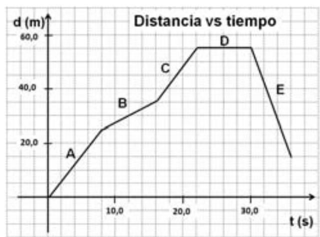


Figura 2.32: Gráfica distancia vs tiempo.

Ahora, la distancia total recorrida por el automóvil vendría siendo la suma de los módulos de los desplazamientos para todos los intervalos, por lo que sumándolos obtenemos también que la distancia total recorrida por el automóvil es de 39 m. Recuerda además que para determinar la distancia que un cuerpo recorre no interesa la dirección.

2. La gráfica de la figura 2.32, muestra el movimiento lineal de un cuerpo para distintos intervalos de tiempo.

   a) Describe el movimiento del cuerpo para cada intervalo de tiempo.

   b) Elabora una gráfica de velocidad vs tiempo a partir de lo observado en este gráfico.

   c) Determina la distancia recorrida por el cuerpo entre los intervalos B y E.

3. Los datos presentados en la tabla 3 representan la distancia y el tiempo de un estudiante al moverse por un aula de clases. A partir de la construcción del gráfico y su posterior análisis identifica el tipo de movimiento de la persona.

4. Los datos presentados en la tabla 4 representan la distancia y el tiempo de un estudiante al moverse por un aula de clases. A partir de la construcción del gráfico y su posterior análisis identifica el tipo de movimiento de la persona.

2.3. El movimiento uniformemente acelerado de un cuerpo, en una trayectoria en línea recta

Hasta el momento te hemos presentado el modelo que explica el movimiento más simple: el movimiento uniforme de un cuerpo, en una trayectoria en Línea recta. Pero, ahora, pretendemos de forma general, que las distintas actividades

Intervalo (s)	Distancia (cm/s)
0,50	29,90
0,60	30,10
0,70	43,50
0,80	52,60
1,00	62,50
1,10	70,70
1,20	77,40
1,30	84,40
1,40	92,60
1,50	102,90
1,60	114.10
1,70	123,60
1,80	131,50
1,90	138,70
2,00	146,00
2,10	155,50
2,20	165,60
2,30	176,60
2,40	186,70
2,50	194,40
2,60	201,80

Cuadro 2.3: Tabla 3

tiempo (s)	distancia(m)
0,00	0,00
0,10	13,80
0,20	33,30
0,30	57,80
0,40	87,60
0,50	121,80
0,60	159,80

Cuadro 2.4: Tabla 4

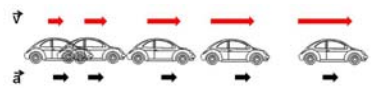


Figura 2.33: Aumento de la rapidez de un cuerpo a una razón constante.

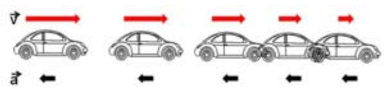


Figura 2.34: Disminución de la rapidez de un cuerpo a una razón constante.

que constituyen esta sección que vas a iniciar y que te proponemos, te lleven a comprender el modelo Físico que explica el movimiento uniformemente acelerado de un cuerpo, que se mueve en línea recta.

2.3.1. Características del movimiento uniformemente acelerado

El movimiento rectilíneo uniformemente acelerado tiene lugar en una trayectoria rectilínea. Se caracteriza porque conlleva una variación o cambio en la rapidez del cuerpo a una tasa de variación constante, pero su dirección/sentido no cambia. La tasa de variación de la rapidez se llama módulo de la aceleración y si además la dirección y el sentido de la velocidad no cambia se dice que el movimiento es con aceleración uniforme o uniformemente acelerado (o desacelerado). Ver figura 2.33 y 2.34.

1. Aumento de la rapidez del cuerpo a una tasa constante, sin cambio de dirección/sentido; se dice a la aceleración constante, cuando la velocidad y la aceleración tienen el mismo sentido.

2. Disminución de la rapidez del cuerpo a una tasa constante, sin cambio de la dirección/sentido; se dice ***a desaceleración constante*** cuando la velocidad y la aceleración tienen sentido contrario.

En ambos casos las flechas superiores representan la velocidad y las inferiores la aceleración (figura 2.33 y 2.34).

En la figura 2.34 el vector $\vec{v}$ aumenta su módulo a medida que el tiempo transcurre y el móvil avanza,es un movimiento con el vector aceleración constante en módulo y en dirección/sentido, llamado uniformemente acelerado. Esta aceleración está representada por el vector $\vec{a}$, tiene igual sentido y dirección que la velocidad $\vec{v}$, además, el vector $\vec{v}$ permanece constante en dirección y sentido pero varía en módulo (representado por la longitud de las flechas); la dirección y sentido del vector aceleración *($\vec{v}$)* permanece constante y el módulo también permanece constante.

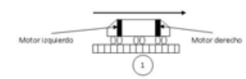


Figura 2.35: Tren bimotor (a).

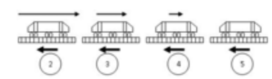


Figura 2.36: Tren bimotor (b).

En la figura 2.35 el vector $\vec{v}$ disminuye su módulo a medida que el tiempo transcurre y el móvil avanza, es un movimiento con el vector aceleración constante *($\vec{a}$)* en módulo y en dirección/sentido, llamado uniformemente acelerado. Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{a}$ tienen igual dirección pero sentidos opuestos, esto significa que el cuerpo desacelera constantemente.

Cuando se tiene un movimiento que comprende ambos casos en uno solo se tiene una primera parte desacelerado y la otra acelerado, pero la aceleración siempre es la misma y se dice movimiento uniformemente acelerado.

Toda aceleración constante puede cambiar el sentido de la velocidad. En las figuras 2.35 y 2.36 presentamos el dibujo de un vehículo que tiene la capacidad de moverse en los dos sentidos (derecha e izquierda).

1. Tren bimotor (motor izquierdo y derecho). Ver figura 2.36.

2. El tren se mueve hacia la derecha mientras ambos motores aceleran hacia la izquierda (desaceleración). Ver figura 2.37.

3. El tren se mueve hacia la izquierda mientras ambos motores aceleran al tren hacia la izquierda, aceleración (propiamente dicha). Ver figura 2.37.

En la figura 2.35 el tren bimotor se mueve con velocidad constante hacia la derecha mientras los dos motores permanecen apagados.

En la figura 2.36 la aceleración se aplica hacia la izquierda. Luego el módulo de la velocidad disminuye tal como lo muestran los puntos 2, 3 y 4. En el punto 5, el módulo de la velocidad alcanza cero, mientras la aceleración producida por los motores permanece constante.

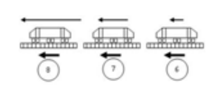


Figura 2.37: Tren bimotor (c).

En figura 2.37 el tren se mueve hacia la izquierda mientras los motores continúan acelerando al tren hacia la izquierda. El módulo de la velocidad aumenta. Entre tanto el sentido de la velocidad cambió.

¿Qué ocurriría con el módulo del vector velocidad si el módulo del vector aceleración fuese cero?

Podemos decir que la aceleración es una magnitud física de carácter vectorial que permite expresar en forma cuantitativa el cambio del movimiento de un cuerpo en un intervalo de tiempo dado.

Todo vector en un movimiento rectilíneo, se describe correctamente si se tiene en cuenta tres características importantes. Estas son:

- La magnitud, tiene que ver con el valor numérico asociado al vector.
- La recta sobre la cual reposa el vector que llamamos dirección.
- Sobre la recta se define un punto llamado origen que orienta un eje positivo y un eje negativo y es relativo. Si el vector apunta hacia el eje positivo se dice que tiene sentido positivo y si apunta hacia el eje negativo se dice que tiene sentido negativo. El sentido permite conocer si el cuerpo va del origen definido hacia un lugar escogido en el eje positivo o va del origen hacia un lugar escogido en el eje negativo; por ejemplo, dos cuerpos pueden tener la misma dirección, pero sentidos opuestos si uno se dirige sobre la misma recta uno al encuentro del otro.

De lo anterior, podemos señalar que un cuerpo en movimiento rectilíneo que experimente un cambio constante del módulo de la velocidad con respecto al tiempo, experimenta una aceleración uniforme. Sin embargo, una aceleración uniforme puede también indicar el cambio del sentido de un movimiento rectilíneo.

La Física estudia todos aquellos fenómenos de la naturaleza que tienen ***estructura matemática***. Por ello debemos expresar todo lo anterior en el lenguaje de la matemática. Ahora estamos en condiciones de plantear una ***expresión matemática de la aceleración***,

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \qquad (2.12)$$

Cabe señalar que el símbolo Δ significa ***cambio***. Por lo tanto, $\Delta\vec{v}$ significa cambio de velocidad. Si tenemos que la dirección no cambia y que cambios de intervalos iguales de velocidad se dan cuando hay cambios iguales de tiempo, la

Figura 2.38: Materiales.

Figura 2.39: Canica sobre la rammpa.

relación no varía y entonces se trata de un movimiento con aceleración constante o movimiento uniformemente acelerado.

Las dimensiones de la aceleración son las siguientes,

$$a = \frac{[longitud]}{[tiempo]^2} \qquad (2.13)$$

La unidad de medida de la longitud en el sistema internacional (SI) es el metro (m) y la unidad de medida del tiempo en el mismo sistema es el segundo (s). Por esta razón las unidades de aceleración en el sistema internacional de unidades es m/s^2. La aceleración es una magnitud cinemática y la fuerza es una magnitud dinámica. La unidad de fuerza es el Newton en el Sistema Internacional. La Fuerza es una causa y la aceleración es un efecto, por ello no deben confundirse, aunque la unidad Newton tiene un equivalente en unidades básicas $(kgm)/s^2$, pero eso no significa que sean iguales, son equivalentes (la igualdad no es lo mismo que la equivalencia, la igualdad es un tipo de equivalencia, pero no todas las equivalencias son igualdades). Muchas personas suelen decir que cuando la masa es unitaria (de un kilogramo) la gravedad g se expresa en m/s^2, eso es falso. Por ejemplo $\boldsymbol{g}$ no es una aceleración, es un campo. Cuando un cuerpo está sometido a la gravedad experimenta una aceleración que numéricamente es igual al valor numérico del campo gravitatorio sobre la superficie terrestre. Podrías explicar, ¿por qué?

2.3.2. Actividad 2.7

Los materiales que necesitas para realizar esta actividad son: una canica, un libro y una rampa (ver figura 2.38).

Ahora sitúa la rampa con poca fricción en uno de los extremos del libro y luego empuja la canica sobre la superficie del libro hasta que obtenga una velocidad que permita que la canica baje por la rampa, tal como se muestra en la figura 2.39.

Observa detenidamente el movimiento de la canica antes y durante la caída por la rampa y contesta las siguientes preguntas.

1. ¿La velocidad de la canica varía o permanece constante cuando cae por la rampa?

2. ¿Puedes decir la razón por la cual la canica tiene este tipo de movimiento en su caída sobre la rampa?

La canica, rodando sobre el libro, antes de caer por la rampa, tiene un movimiento uniformemente desacelerado, pero la aceleración es pequeña ya que sus causas están en la fricción entre la canica y la superficie y son fuerzas muy pequeñas las que se aplican que podemos considerar que no cambian el estado de movimiento del cuerpo en forma sustancial, y por ello podemos considerar el movimiento casi a velocidad constante.

Durante la caída de la canica sobre la rampa, el movimiento de la canica no se da a velocidad constante, puesto que existe una componente de la fuerza de gravedad que tiene la misma dirección del movimiento y que es la causante del cambio del movimiento de la canica.

2.4. Para que conozcan un poco más sobre el movimiento en una trayectoria en línea recta uniforme

A continuación vamos a presentar aspectos fundamentales con respecto al análisis de los gráficos de aceleración vs tiempo, desde la perspectiva analítica y geométrica.

2.4.1. Gráficas de aceleración versus tiempo

¿Qué forma tienen las gráficas de aceleración versus tiempo para un cuerpo que describe un movimiento uniformemente acelerado (MRUA)?

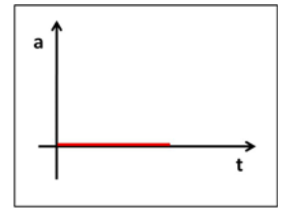


Figura 2.40: Gráfica aceleración vs tiempo.

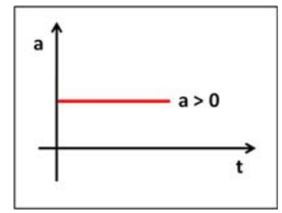


Figura 2.41: Gráfica aceleración vs tiempo.

1. Aceleración igual a cero.

   En este caso, el cuerpo describe un movimiento en el cual no hay aceleración, en otras palabras, el cuerpo se mueve con velocidad constante. Como dijimos anteriormente, para atribuir un signo a la aceleración que indica su sentido, debemos dar una referencia. Normalmente se toma, si no se dice lo contrario, como sentido positivo el sentido de la velocidad sobre la línea recta sobre la cual reposa el vector velocidad. Ver figura 2.40.

2. Módulo de la aceleración mayor que cero.

   En este caso el cuerpo describe un movimiento uniformemente acelerado, es decir, el cuerpo se mueve con rapidez variable que va en aumento (ver figura 2.41).

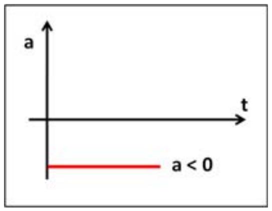


Figura 2.42: Gráfica aceleración vs tiempo.

3. Módulo de la aceleración menor que cero.

   Esta gráfica indica que el cuerpo se está desacelerando (aclaración con sentido opuesto al de la velocidad), por tanto, el módulo de la velocidad disminuye (ver figura 2.41).

   Igual razonamiento se hace para los gráficos de un movimiento rectilíneo, rapidez versus tiempo y en ese caso la velocidad hacia el eje positivo (sentido positivo) sería en el primer cuadrante y para el eje negativo sería sentido negativo. Como está sobre un eje fijo, podemos decir que el gráfico es de velocidad versus tiempo.

2.5. Análisis geométrico del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

Si te dan un gráfico de velocidad versus tiempo de un cuerpo que describe un movimiento uniformemente acelerado a lo largo de una trayectoria rectilínea, ¿cómo podemos calcular la distancia total recorrida por el cuerpo?

Para poder calcular la distancia total recorrida por un cuerpo, primero debemos conocer los parámetros que describen dicho movimiento, a través de un gráfico, una ecuación, una tabla, o cualquier otro instrumento. Además, debemos conocer de antemano las condiciones iniciales del movimiento del cuerpo. Veamos primero los gráficos de velocidad versus tiempo para distintas condiciones iníciales.

2.5.1. Gráfica de velocidad versus tiempo del MRUA

Estas son las condiciones iníciales:$t_i = 0$; $v_i = 0$; $x_i = 0$. Si un cuerpo parte del reposo, entendiéndose por reposo, que el cuerpo tiene las condiciones iníciales siguientes: t_i= 0 y $v_i = 0$, y describe un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, la gráfica de velocidad versus tiempo que representa este movimiento tendrá la siguiente forma en el caso en que el eje positivo se escoja en el mismo sentido que la aceleración:

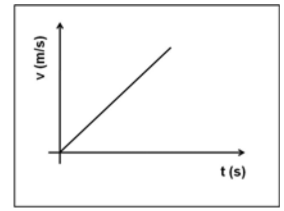


Figura 2.43: Gráfica velocidad vs tiempo.

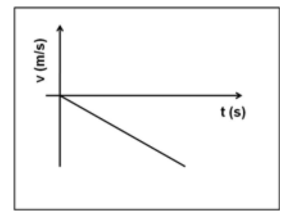


Figura 2.44: Gráfica velocidad vs tiempo.

Aquella que parte del origen del tiempo ($t_i = 0$) y tiene pendiente positiva (m = a)

La gráfica de velocidad versus tiempo que describe un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, en el caso en que el eje positivo se escoja en el sentido de la aceleración, tiene la forma mostrada en la figura 2.42.

Aquella que parte del origen del tiempo ($t_i = 0$) y tiene pendiente negativa (m = − a)

.

La gráfica de velocidad versus tiempo que describe un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, en el caso en que el eje positivo se escoja en el sentido contrario al de la aceleración, tiene la forma mostrada en la figura 2.43.

Las pendientes de las gráficas mostradas en las figuras 2.43 y 2.44 representan la aceleración del cuerpo, la cual está dada por la expresión,

$$a = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} \tag{2.14}$$

Donde $\boldsymbol{a}$, y $\boldsymbol{v}$ representan los módulos del vector aceleración y velocidad respectivamente. De lo anterior, podemos ver que para $t_i = 0$, $x_i = 0$ y $v_i = 0$; tenemos que la ecuación (1) se puede escribir de la siguiente forma,

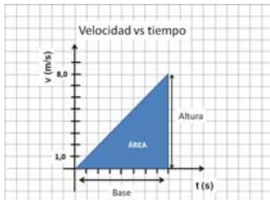


Figura 2.45: Gráfica velocidad vs tiempo.

$$v = \pm at + v_i \tag{2.15}$$

y para $v_i = 0$ se tiene $\pm at$.

La distancia total recorrida por un cuerpo con movimiento uniformemente acelerado se puede representar utilizando la gráfica v versus t. Pues, el área bajo dicho gráfico (figura 2.48), representa la distancia total recorrida por el cuerpo.

La figura muestra que el área que debemos calcular está dada por el área de un triangulo rectángulo; donde la base está representada por el eje del tiempo y la altura está representada por el eje del módulo de la velocidad.

Como el área de un triángulo rectángulo es la siguiente:

$$A = \frac{b\ x\ h}{2} \tag{2.16}$$

Luego si sustituimos la base y la altura por el tiempo y la rapidez respectivamente; llegamos a la expresión

$$A = \frac{b\ x\ h}{2} = \frac{(t)v}{2} \tag{2.17}$$

Reemplazamos el valor de la rapidez dada por la ecuación (2) v = at, en la expresión anterior, llegamos a la conclusión

$$d = 1/2\ a\ t^2 \tag{2.18}$$

Conociendo el valor del módulo de la aceleración para la ecuación (3), entonces podemos conocer la distancia total recorrida por un cuerpo durante un tiempo dado.

Gráfica de rapidez versus tiempo del MRUA (rapidez inicial distinta de cero)

En muchas ocasiones resulta que no conocemos los parámetros iniciales de un fenómeno dado y por ello es preciso construir gráficas que nos permitan extrapolar con cierto grado de confianza con el fin de conocer el comportamiento

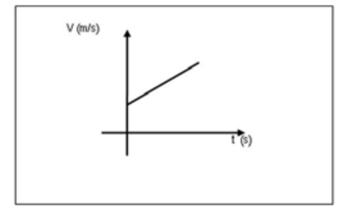


Figura 2.46: Gráfica velocidad vs tiempo.

de un fenómeno. Un ejemplo es la medición en forma experimental del módulo de la velocidad de un cuerpo que se mueve en línea recta con aceleración constante y que parte con velocidad inicial distinta de cero.

Si escogemos el sentido positivo del eje sobre la recta del movimiento rectilíneo el sentido de la velocidad, explica en forma breve y clara los parámetros que debes conocer para determinar el valor del módulo de la aceleración de un cuerpo que describe un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

Si un cuerpo inicialmente tiene una velocidad vi que llamaremos vo y a medida que el tiempo transcurre lo hace con un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, si el eje positivo escogido corresponde al sentido de la velocidad, entonces la gráfica de rapidez versus tiempo tendrá la forma,

La pendiente de la gráfica anterior es el módulo de la aceleración del cuerpo y está dada por la siguiente relación,

$$a = \frac{v - v_0}{t - t_0} \tag{2.19}$$

La ecuación correspondiente al gráfico 2.48 que cumple las condiciones $v_0 \neq 0$ a t = 0, tiene la siguiente forma,

$$v = v_0 + at \tag{2.20}$$

Como vimos, la distancia total recorrida para este tipo de movimiento se puede obtener calculando el área bajo la gráfica de rapidez versus tiempo.

Para calcular la distancia total recorrida, debemos dividir el área total en dos áreas (área 1 y área 2). Tal como se muestra en la figura 2.4.7.

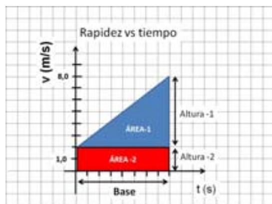


Figura 2.47: Área del gráfico.

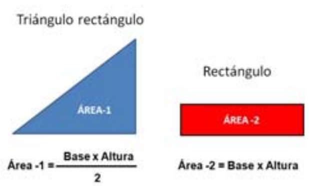


Figura 2.48: Cálculo del área.

Así, el área 1 será el área de un triángulo rectángulo y está dada por la expresión, tal como se hizo en el caso 1,

$$A = \frac{base\ x\ altura}{2} \tag{2.21}$$

En tanto que el área dos es el área de un rectángulo que está dado por la siguiente expresión, area = base x altura

A continuación se calculará el área para cada figura (triángulo rectángulo y rectángulo) en forma independiente (figura 2.50).

Cómo la distancia total recorrida está dada por el área bajo el gráfico. En este caso la rapidez representa la altura y la base está representada por el tiempo. En consecuencia, tenemos que el área 1 (distancia 1) es la expresión,

$$d_1 = \frac{(t)\ (v)}{2} \tag{2.22}$$

Y el área 2 (distancia 2) está dada por,

$$d_2 = (t)\ (v_0) \tag{2.23}$$

Por lo tanto, el área total está dada por la expresión,

$$A_T = \frac{(t)\ (v)}{2} + (t)\ (v_0) \tag{2.24}$$

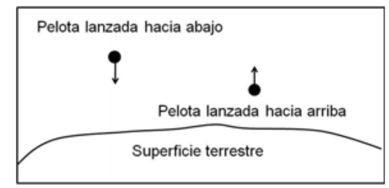


Figura 2.49: Movimiento de una piedra al caer de cierta altura.

La distancia total recorrida no est otra cosa que el área total que está dada por la expresión,

$$d_T = d_1 + d_2 \tag{2.25}$$

Como la rapidez está dada en función del módulo de la aceleración con la siguiente expresión,

Y si reemplazamos la ecuación anterior en la ecuación (5), tenemos la expresión,

$$d_T = \frac{(a)\ (t)^2}{2} + (v_0)\ (t) \tag{2.26}$$

La ecuación (6) nos permite calcular la distancia total recorrida por un cuerpo que describe un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado con una rapidez inicial distinta de cero.

2.6. Movimiento de caída libre de los cuerpos

Un ejemplo muy común de movimiento uniformemente acelerado es el movimiento que experimenta una piedra cuando se deja caer desde cierta altura (figura 2.52).

El movimiento de caída libre es un ejemplo de movimiento rectilíneo uniformemente acelerado en el cual todo cuerpo que se deja libremente a una altura sobre la superficie terrestre experimenta un cambio de movimiento. Este cambio en la velocidad durante un tiempo dado se mide a través de una magnitud física que se conoce con el nombre de aceleración debida a la gravedad. Una de las formas de notar la presencia de la gravedad es dejando libre un cuerpo a una altura cualquiera de la superficie terrestre.

Para definir el sentido de la aceleración del cuerpo debido a la gravedad, es preciso conocer de antemano el concepto de marco de referencia inercial, pues debemos recordar que es un concepto físico que nos permite asignar una dirección y un sentido a las componentes de los vectores a la hora de describir el movimiento de un cuerpo.

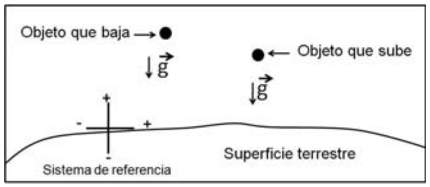


Figura 2.50: El sentido de la gravedad, asunto de convención.

La figura 2.53 muestra un marco de referencia útil ubicado en la superficie terrestre, además que muestra el sentido que se eligió para describir el movimiento. ¿Existirá alguna diferencia en la descripción del movimiento de un cuerpo que cae cerca la superficie terrestre si elegimos en forma arbitraria el sentido de los ejes?

El análisis nos dice claramente que los objetos lanzados hacia arriba y los que caen hacia abajo tienen la aceleración en el mismo sentido negativo con respecto al eje escogido. Cabe señalar que el módulo de la aceleración es constante y su dirección negativa según los ejes escogidos. Esto significa que si la aceleración de un cuerpo tiene sentido negativo, ello no significa que el módulo de la velocidad deba disminuir o aumentar automáticamente, igualmente sucede si la aceleración del cuerpo tiene sentido positivo de acuerdo a los ejes escogidos. En la figura hemos señalado el sentido de la aceleración como negativo, pero en el caso en que el cuerpo sube el módulo de la velocidad disminuye y en el caso en que el cuerpo baja el módulo de la velocidad aumenta.

¿Qué crees que ocurre con la aceleración de los cuerpo que caen sobre la superficie de la Luna?

La Tierra genera un campo gravitatorio que es uniforme cerca de la superficie terrestre. En la figura 2.54, se puede observar la distancia recorrida por la partícula en intervalos iguales de tiempo, el primer segundo, el segundo «***segundo***», el tercer segundo, etc. Si representamos el módulo de la velocidad con el tamaño del vector también lo veríamos aumentar a medida que el tiempo transcurre pero no al mismo ritmo. Vemos que la partícula para diferentes tiempos (1,0 s; 2,0 s; 3,0 s), tiene diferentes velocidades, sin embargo el vector a = g que representa la aceleración que experimenta el cuerpo en el campo gravitatorio permanece constante a lo largo del recorrido.

El valor numérico aproximado de a = g (recuerda no confundir los dos

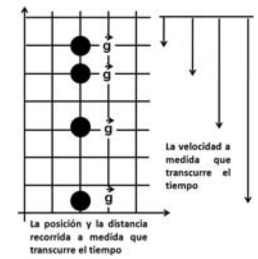


Figura 2.51: Distancia recorrida a medida que transcurre el tiempo.

conceptos porque se trata de una ecuación y no de una igualdad) cerca de la superficie terrestre es de 9,82 N/kg.

Para resolver ejercicios que tiene que ver con caída libre, podemos utilizar las expresiones que describen el movimiento uniformemente acelerado, ya que como hemos visto, el movimiento de caída libre es un ejemplo de movimiento uniformemente acelerado.

Así, podemos reescribir las expresiones que representan el movimiento uniformemente acelerado para el movimiento de caída libre.

Si queremos conocer el valor de la distancia total recorrida por un cuerpo que cae libremente sobre la superficie terrestre reemplazamos, en las expresiones de los cuerpos uniformemente acelerados en una trayectoria rectilínea, a por g y obtenemos,

$$d_t = \frac{g\, t^2}{2} + v_i\, t \tag{2.27}$$

A partir de la expresión anterior y $g = \frac{v_f - v_i}{t}$, mediante sustituciones simples podemos encontrar otras expresiones que nos permiten describir distintos parámetros del movimiento de caída libre. Estas son,

$$v_i = v_o + gt \tag{2.28}$$

$$2gd = v_f^2 - v_i^2 \tag{2.29}$$

Recuerda que cuando tomamos el eje positivo hacia arriba (perpendicular a la superficie de la Tierra y hacia fuera de la Tierra) tenemos que a = − g.

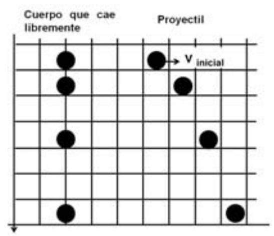


Figura 2.52: Posiciones para tiempos iguales de dos objetos, uno en caída libre y otro con movimiento de proyectil.

2.7. ¿Cómo podemos jugar mejor el beisbol y el fútbol? Movimiento de proyectiles

El estudio de los proyectiles a lo largo de la historia ha jugado un papel muy importante en el desarrollo de la tecnología que tenemos en la actualidad, es por esta razón que debemos conocer los conceptos básicos que permiten describir el movimiento de proyectiles cerca de la superficie terrestre.

El conocimiento del movimiento rectilíneo uniforme y el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, constituyen los requisitos mínimos que nos permitirán abordar el estudio del movimiento de proyectiles en esta sección.

Si dos cuerpos, uno que tu consideras un proyectil (objeto impulsado horizontalmente desde una mesa, por ejemplo) y otro objeto dejado caer libremente, al mismo tiempo, desde una misma altura, ¿llegarán al piso en tiempos iguales o desiguales?

La figura 2.55 muestra las posiciones para tiempos iguales de dos objetos. Uno que experimenta un movimiento de caída libre y otro que es un proyectil, los cuales parten al mismo tiempo. Observa y analiza la figura; ¿Qué puedes concluir de esta figura?

El movimiento de proyectiles es un ejemplo de movimiento bidimensional, ya que es la combinación de dos movimientos rectilíneos: uno que se da con velocidad (MRU) uniforme que ocurre en el eje horizontal y otro que ocurre con aceleración uniforme (MRUA) que ocurre en el eje vertical.

El lanzamiento de una piedra, constituye un ejemplo de movimiento de proyectiles, cuya trayectoria es la mostrada en figura anterior. La figura 2.56 muestra el vector aceleración, el vector velocidad y sus componentes tanto en el eje x como en el eje y.

En la figura anterior, h representa la altura máxima del proyectil, medida desde la superficie terrestre; la letra ***R*** representa el alcance horizontal de la

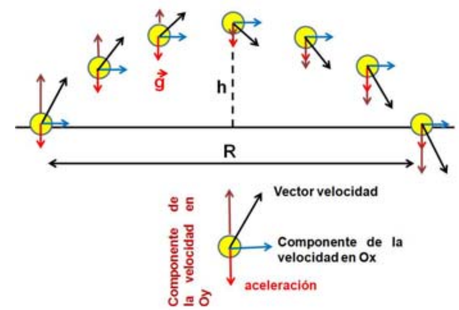


Figura 2.53: Movimiento de proyectiles.

piedra. El vector aceleración permanece constante a lo largo del recorrido; la componente en el eje Ox el vector velocidad permanece constante durante todo el recorrido de la piedra; sin embargo, la componente en el eje y del vector velocidad cambia durante todo el recorrido debido a la aceleración generada por la gravedad que actúa en la dirección del eje ***Oy*** durante todo el recorrido. Por lo tanto, si la componente del vector velocidad en el eje y cambia, el vector velocidad resultante también debe cambiar. El ángulo se mide a partir de una línea sobre la superficie terrestre.

El movimiento de proyetiles es producto de la suma de dos movimiento: un movimiento horizontal que se caracteriza por ser uniforme y en línea recta; y un movimiento vertical que se caracteriza por ser un movimiento en caída libre, es decir, un movimiento uniformemente acelerado.

2.7.1. Descripción del movimiento parabólico en el eje horizontal

Como en el eje horizontal, el movimiento que describe la partícula se da a velocidad constante, es decir, es un movimiento uniforme en una trayectoria en línea recta.

Si conocemos el vector velocidad inicial con la cual se lanza la piedra y el ángulo que forma dicho vector con el eje horizontal, podremos conocer el valor de la velocidad horizontal a través de la descomposición trigonométrica del vector velocidad inicial.

Así tenemos que la velocidad horizontal está dada por,

$$v_x = v_0 \, cos\theta \tag{2.30}$$

La posición horizontal para cada intervalo de tiempo del cuerpo en el eje horizontal la podemos obtener multiplicando la rapidez horizontal v_x por el tiempo (***t***) que transcurrió hasta el instante en que nos interesa. Así tenemos que,

$$x = v_x\, t = v_0\, cos\theta\, t \tag{2.31}$$

2.7.2. Descripción del movimiento parabólico en el eje vetical

Como en el eje vertical, el cuerpo es acelerado por la gravedad, y como tal aceleración es uniforme, entonces utilizamos los modelos que permiten describir el movimiento rectilíneo con aceleración constante, especialmente el movimiento de caída libre cerca de la superficie terrestre.

La rapidez para un movimiento de caída libre con aceleración uniforme, está dada por la expresión

$$v = v_0 - g\, t \tag{2.32}$$

Por lo tanto, en el movimiento bidimensional, la rapidez vertical estará dada por,

$$v_y = v_0\, sen\theta - g\, t \tag{2.33}$$

La ecuación que representa la posición vertical en un movimiento bidimensional, es similar a la ecuación que permite obtener la posición vertical para cada intervalo de tiempo de un cuerpo que experimenta una aceleración uniforme, la única diferencia radica en que se sustituye el valor v_0 por $v_0\, sen\theta$.

Entonces tenemos,

$$y = (v_0\, sen\theta)\, t - 1/2\, g\, t^2 \tag{2.34}$$

Hasta aquí, hemos encontrado cinco ecuaciones básicas que describen el movimiento bidimensional. Las demás relaciones que describen el movimiento bidimensional son casos específicos de dicho movimiento y se obtienen utilizando los modelos físicos del movimiento rectilíneo uniforme y del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

2.7.3. Relación entre las posiciones verticales y horizontales

Para establecer una relación entre las posiciones verticales y horizontales, simplemente debemos establecer una igualdad entre los tiempos que utilizó el cuerpo para desplazarse tanto verticalmente como horizontalmente (expresión 2.35).

$$y = (v_0\, sen\theta)\, (\frac{x}{v_0\, cos\theta}) - \frac{g}{2}(\frac{x}{v_0\, cos\, \theta})^2 \tag{2.35}$$

Utilizando funciones trigonometricas tenemos,

$$y = (x\, tan\theta) - \frac{gx^2}{2\, (v_0)^2\, cos^2\, \theta} \tag{2.36}$$

Esa es la ecuación de una parábola, la cual se escribe de manera general: $y = a\;\; x^2 + b\;\; x + c$, donde ***a***, ***b*** y ***c*** son constantes. En nuestro caso, $a = -\frac{g}{2(v_0)^2\, cos\, ^2\theta}$; $b = tan\, \theta$; y c = 0.

2.7.4. Determinación del alcance máximo vertical (altura máxima)

El alcance máximo vertical se obtiene fácilmente utilizando una de las cinco expresiones básicas del movimiento bidimensional, descritas anteriormente.

Para obtener el alcance horizontal se usa el siguiente razonamiento: un proyectil llega a su altura máxima cuando la componente vertical de la velocidad es cero (pues el cuerpo deja de subir e inicia el descenso). Si esta componente se hace cero, entonces, la expresión 2.36 queda como,

$$0 = v_0\, \text{sen}\;\, \theta - g\, t \tag{2.37}$$

Ahora calculamos el tiempo empleado por el cuerpo para llegar a la posición vertical donde la componente vertical de la velocidad se hizo cero. Esto se hace despejando ***t***, de la ecuación anterior tenemos,

$$t = \frac{v_0\, \text{sen}\;\, \theta}{g} \tag{2.38}$$

y reemplazándolo en la expresión 2.39, tenemos,

$$y = (v_0\, sen\, \theta)(\frac{v_0\, \text{sen}\;\, \theta}{g}) - \frac{1}{2}\, g(\frac{v_0\, sen\, \theta}{g})^2 \tag{2.39}$$

En lugar de ***y***, se usa ***h*** para representar la altura máxima, de lo que obtenemos,

$$h = \frac{(v_0)^2\, sen^2\, \theta}{2\, g} \tag{2.40}$$

2.7.5. Determinación del alcance máximo horizontal

Para calcular el alcance máximo se usa el siguiente razonamiento: ¿Qué tiempo le toma al cuerpo regresar a su altura inicial?. Es decir, en nuestro caso llegar al piso para cuyo caso y = 0. Lo que se ve en la expresión,

$$0 = v_0\, sen; \theta\, t - 1/2\, g\, t^2 \tag{2.41}$$

De la ecuación anterior, despejamos ***t*** y obtenemos,

$$t(v_0\, sen\, \theta - 1/2\, g\, t^2 = 0 \tag{2.42}$$

Y hay dos soluciones, $\boldsymbol{t = 0}$ que es cierto pues al inicio está en la posición de altura cero y la otra es la expesión,

$$t = \frac{2\ v_0\ sen\ \theta}{g} \tag{2.43}$$

Y por último sustituimos el tiempo en $x = (v_0\ cos\ \theta)\ t$ y obtenemos la expresión,

$$x = (v_0\ cos\ \theta)(\frac{2v_0\ sen\ \theta}{g}) \tag{2.44}$$

Reemplazamos $\boldsymbol{x}$ por $\boldsymbol{R}$ para representar el alcance máximo horizontal y utilizando una identidad trigonometrica ($sen\ 2\ \theta = 2\ cos\ \theta\ sen\ \theta$), llegamos a la expresión,

$$R = \frac{v_0^2\ sen\ 2\ \theta}{g} \tag{2.45}$$

3

Dinámica

Galileo buscaba entender y comprender la relación real entre la Fuerza y los movimientos de los cuerpos. Este tema, también, fue centro de atención para Newton. A partir de los trabajos de Galileo, Newton construyó un modelo que le permitió afirmar que no existía relación alguna entre la ***Fuerza*** y ***los movimientos*** en sí. Newton estableció la relación real que existe entre ***la Fuerza*** y ***el cambio de estado de movimiento de un cuerpo***. Esta Ley se llama II Ley de Newton.

En la vida diaria has experimentado cómo el automóvil en el que viajas cambia continuamente de movimiento (aumenta su velocidad, disminuye su velocidad, frena, arranca, etc.). ¿Alguna vez has reflexionado sobre por qué sucede eso o que causa esos cambios continuos de velocidad en el automóvil en el que viajas? Con ello te queremos decir que los cambios en el estado de movimiento de un cuerpo no son algo extraño para ti, sólo que no habéis reflexionado sobre los mismos y el por qué se da. Unido a eso no sabes cómo caracterizar lo que es, por ejemplo, un estado de movimiento. Las similitudes aquí radican, en el hecho de que vas a estudiar un fenómeno natural, que conoces y que no sólo desde la Física se perciben o ven estos cambios de movimiento. Pero, sí es la Física la que se interesó en estudiarlos y además, qué significó este estudio para la sociedad y sus avances que se han traducido en mejoras de la calidad de vida.

Los temas a tratar en esta sección son: una descripción breve del objeto de estudio de la dinámica; una comparación entre el concepto de Fuerza en la vida cotidiana vs el concepto de Fuerza en Física; las fuerzas como interacciones; qué es el estado de movimiento de un cuerpo; por último, la unidad de fuerza en el sistema internacional de unidades. Todo ello dirigido a que al finalizar esta sección seas capaz de ***Identificar la fuerza como causante del cambio en el estado de movimiento de un cuerpo***. Pero, es claro, que todo lo anterior implica que seas capaz de:

- Diferenciar el concepto de Fuerza en el contexto cotidiano del concepto de Fuerza en Física.

- Comprender que el movimiento uniforme no necesita fuerzas para tener lugar.
- Conocer que una Fuerza es el resultado de la interacción de dos objetos con propiedades específicas (masa, carga), por lo tanto una fuerza es una interacción.
- Conocer que en Física la Fuerza es una magnitud vectorial.
- Identificar lo que caracteriza un estado de movimiento.
- Identificar cuando un cuerpo cambia de estado de movimiento.
- Conocer la unidad del módulo de fuerza en el SI y sus dimensiones a partir de las unidades básicas.

3.0.6. ¿Qué estudia la dinámica?

Dos puntos fundamentales de está sección son el concepto de Fuerza y el concepto de Estado de movimiento. Eso no significa que sea lo único a tratar en este tema, pero son los que le darán forma a lo que intentamos que comprendas y conozcas.

La Dinámica tiene como eje fundamental la Fuerza, la cual produce en los sistemas que actúa respuestas que se estudian a través de las Leyes de Newton. ¿Qué significa esto? Imagina un sistema formado por una pelota y la superficie horizontal sobre la cual se mueve con movimiento uniforme (Figura 3.1). De repente sobre la pelota actúa una fuerza $\vec{F}_1$ (representada a través de la patada de un jugador de fútbol) la cual produce un cambio en la velocidad de la pelota. ¿Qué hizo la fuerza o la patada del jugador? En este caso, la patada del jugador (que se expresa en la fuerza) causó un cambio en el estado de movimiento del cuerpo. Este cambio se ve reflejado en el hecho de que la pelota pasa a moverse con una mayor rapidez que la que tenía inicialmente.La Dinámica tiene como eje fundamental la Fuerza, la cual produce en los sistemas que actúa respuestas que se estudian a través de las Leyes de Newton. ¿Qué significa esto? Imagina un sistema formado por una pelota y la superficie horizontal sobre la cual se mueve con movimiento uniforme. De repente sobre la pelota actúa una fuerza $\vec{F}_1$ (representada a través de la patada de un jugador de fútbol) la cual produce un cambio en la velocidad de la pelota. ¿Qué hizo la fuerza o la patada del jugador? En este caso, la patada del jugador (que se expresa en la fuerza) causó un cambio en el estado de movimiento del cuerpo. Este cambio se ve reflejado en el hecho de que la pelota pasa a moverse con una mayor velocidad que la que tenía inicialmente.

La fuerza F_1 al actuar sobre la pelota actúa, sobre el sistema pelota−superficie (Figura 3.1). La acción de esta fuerza produjo una respuesta en el cuerpo: cambió su velocidad, varió la dirección/sentido y la aumentó. La fuerza al actuar sobre el cuerpo produjo un cambio en el estado de movimiento del cuerpo, o lo que es lo mismo, dicha fuerza produjo una respuesta en el sistema dentro del cual actúo. Y son estas respuestas lo que analiza y estudia las Leyes de Newton.

Figura 3.1: Interacción entre la pelota y el pie del jugador (imagen de google).

La situación ejemplificada arriba nos permite afirmar que la Dinámica estudia la fuerza como causante de los cambios en el estado de movimiento de los cuerpos. Con la finalidad de que comiences con buen pie o de buena forma el estudio de la Dinámica es necesario que comprendas lo que es un estado de movimiento. Lo que te permitirá comprender lo que es un cambio en el estado de movimiento de un cuerpo. En el mapa conceptual mostrado a continuación (figura 3.2), se representa esquemáticamente, cómo la Fuerza, como eje fundamental de la Dinámica, ayuda a dar forma a una estructura general de la misma.

3.0.7. La fuerza en Física vs la Fuerza en la vida cotidiana

La fuerza es el concepto que articula o da vida a la Dinámica Newtoniana. El término fuerza es muy utilizado en las conversaciones diarias de cada uno de nosotros como integrantes de esta sociedad, pero para la Física tiene un significado muy distinto al que se le da en la vida cotidiana (figura 3.3).

Al conversar utilizamos el término fuerza, entre otras cosas, como:

1. La fuerza como una propiedad intrínseca de los cuerpos, las personas o cosas: ***el hombre tiene mas fuerza que el perro***; ***una mujer tiene menos fuerza que el hombre***; ***puso mucha fuerza de voluntad y logró sus objetivos***.
2. La fuerza como causa del movimiento de los cuerpos: ***Le aplicó fuerza a la caja y la movió***; ***si no le aplicas fuerza no se va a mover***; ***esa máquina usa mucha fuerza para mover los bultos***.
3. La fuerza como empuje o tirón: ***lo empujaste y se cayó***; ***Tira con fuerza y se abrirá***; ***al empujarlo se movió***.

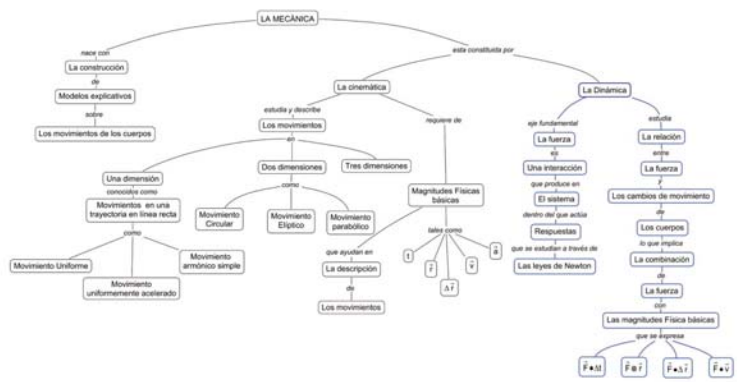


Figura 3.2: Fuerza como eje fundamental de la Dinámica.

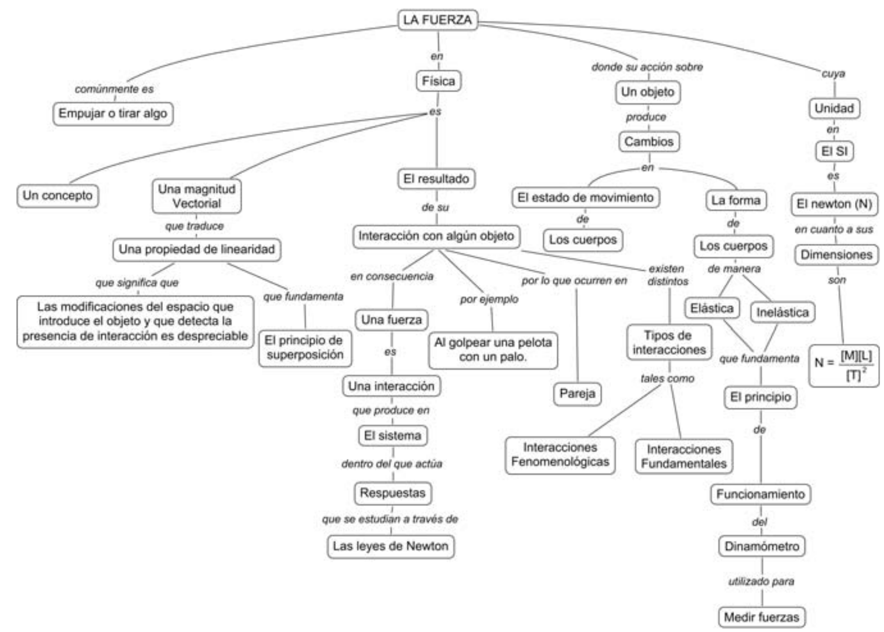


Figura 3.3: La Fuerza en la vida cotidiana vs la Fuerza en Física.

Por nuestra vivencia diaria llegamos a creer que el movimiento de los cuerpos es el resultado directo de la interacción entre los cuerpos, es decir, que al aplicar una fuerza sobre los cuerpos a nuestro alrededor estos se mueven. Pero, esto no es así e intentaremos convencerte de ello. Lo que produce la fuerza sobre los cuerpos es un cambio en el estado de movimiento de los mismos.

Veamos por qué hacemos la afirmación anterior, por ejemplo, volviendo a la situación de la pelota, si el futbolista no interactúa con la pelota a través de la patada no necesariamente hay cambio en el estado de movimiento de dicha pelota. Aquí hubo una interacción, pero la interacción entre los cuerpos es algo más profundo que sólo tocar los cuerpos o que estos se toquen entre sí (fuerzas de contacto). Las interacciones entre los cuerpos se puedan dar sin que haya contacto alguno entre los cuerpos, por lo que te podemos decir que hay interacciones sin contacto o interacciones con contacto.

Ante todo lo anterior debes tener claro que las interacciones son fundamentales para el estudio de la Dinámica. Por lo que en Física las interacciones se describen convenientemente por un concepto denominado: fuerza. La fuerza en Física no es un término como en la vida diaria, que se usa para conversar, es un concepto al cual asociamos una estructura matemática.

La fuerza, como un concepto es una magnitud Física que se utiliza para modelizar las interacciones entre cuerpos. Los efectos de las interacciones son muchos. Nosotros nos vamos a centrar inicialmente en la capacidad que tiene las fuerzas de provocar cambios en el estado de movimiento de los cuerpos.

Unido a lo anterior, es necesario hacer hincapié que las fuerzas se clasifican en Fuerzas fundamentales y Fuerzas fenomelógicas. En este sentido y con la finalidad de darte puntos de partida para que amplies tus conocimientos te presentamos en dos mapas conceptuales información sobre estas dos grandes clasificaciones de las Fuerzas (figuras 3.4 y 3.5).

3.0.8. Las fuerzas como interacciones

¿Qué entiendes por interaccción?

____
____
____
____
____
____

En el diccionario la palabra interacción tiene el siguiente significado: acción que se ejerce recíprocamente entre dos o más objetos, agentes, fuerzas, funciones, etc. ¿Qué quiere decir esto realmente? A partir de nuestras vivencias cotidianas, todos comprendemos, así sea de una manera simple, el concepto de fuerza. Cuando se empuja o se jala un objeto se aplica una fuerza sobre él (figura 3.6). Se aplica una fuerza cuando se lanza o se patea una pelota. En estos ejemplos, la palabra fuerza se asocia con el resultado de actividad muscular y con cierto

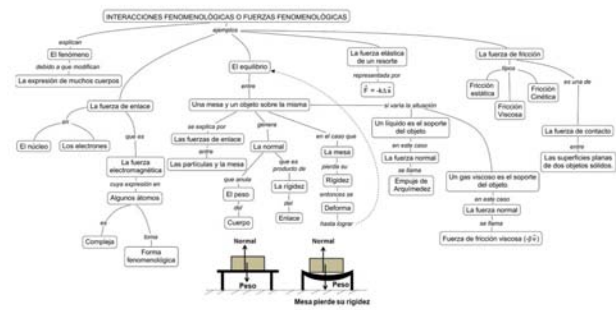


Figura 3.4: Características de las fuerzas fenomenológicas.

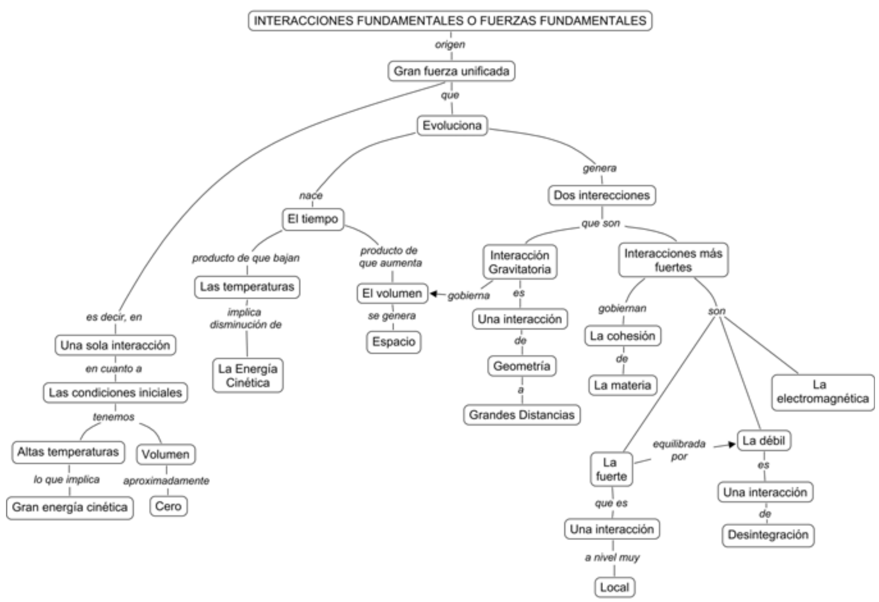


Figura 3.5: Características de las fuerzas fundamentales.

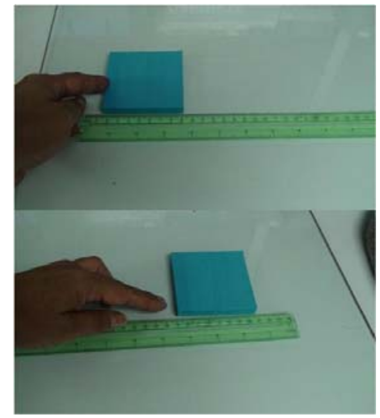


Figura 3.6: Aplicando fuerza a un objeto.

cambio en el estado de movimiento de un cuerpo. Sin embargo, las fuerzas no siempre producen cambio de movimiento en un objeto, por ejemplo, usted puede empujar un carro y no ser capaz de cambiar su estado de reposo a estado de movimiento con velocidad distinta de cero.

Si empujamos un objeto como se muestra en la figura anterior, y luego dejamos de aplicar dicha fuerza, este continúa moviéndose. Sin embargo, termina frenando hasta que se detiene ¿Por qué cambia su estado de movimiento a pesar de que ya no lo empujamos?

¿Por qué continua su movimiento cuando la mano no está en contacto con el objeto?

3.0.9. Estado de movimiento de un cuerpo

Para conocer el estado de movimiento de un cuerpo debemos tener en cuenta cuatro informaciones básicas las cuales son: la posición del cuerpo en un momento dado; el cambio de posición del cuerpo (desplazamiento); el cambio de posición de un cuerpo en un tiempo dado (velocidad); y el cambio de movimiento en un tiempo dado (aceleración).

1. Un ciclista que se dispone a entrenar en la mañana del domingo, se encuentra en un punto A de donde va a comenzar su entrenamiento y su reloj marca las 10:00 a.m. Después que ha iniciado su entrenamiento y se siente un poco cansado consulta su reloj mientras viaja y marca las 12:05 p.m. y se encuentra en un punto B. Hubo un cambio, ¿Qué cambió? Explica tu respuesta, en los espacios en blanco a continuación.

2. ¿A qué se debió el cambio que señalaste arriba?

Hasta la formulación del principio de inercia por Galileo y Newton se pensaba, desde la época de Aristóteles, que el estado natural de movimiento de los cuerpos era el reposo y que las fuerzas eran necesarias para mantenerlos en movimiento. Newton y Galileo mostraron que todos los cuerpos se encuentran en movimiento uniforme, en distintos sistemas de referencia inerciales, sin que actúen fuerzas sobre ellos, es decir, que no es necesaria una fuerza para que exista movimiento uniforme, esto los llevó a pensar que el reposo es uno de los estados uniforme de movimiento de los cuerpos. Esta nueva concepción creó un cambio de paradigma: ***la fuerza no es la causa del movimiento de los cuerpos, la fuerza provoca un cambio en el estado de movimiento de los cuerpos***.

3.0.10. La Fuerza causa del cambio en el estado de movimiento de un cuerpo

Las fuerzas son interacciones que producen cambios en el estado de movimiento de un cuerpo. Los conceptos ***Fuerza*** y ***Cambio*** están relacionadas,

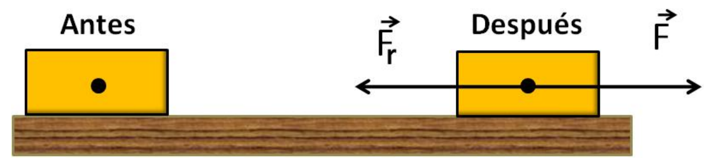


Figura 3.7: La fuerza como causa del cambio de movimiento de los cuerpos.

si la suma de todas las fuerzas que actúan sobre un objeto es cero no habrá cambio en el estado de movimiento. Así, si un cuerpo está en movimiento y la interacción resultante es nula el movimiento será rectilíneo y uniforme, sin cambio en su dirección/sentido y sin cambio en su rapidez.

Un cuerpo que estaba en reposo, inicia su movimiento (cambia del reposo a velocidad distinta de cero) por acción de una fuerza $\vec{F}$. Observemos esto en detalle en la Figura 3.7, en el estado ***Antes*** de la interacción con la fuerza el cuerpo se encuentra en reposo. En el estado ***Después***, el cuerpo cambia su estado de movimiento (de reposo a velocidad distinta de cero) debido a la acción de la Fuerza ***($\vec{F}$)***. Es decir, la fuerza ***($\vec{F}$)***, fue la causa del cambio de estado de movimiento del cuerpo. Es necesario resaltar que debido a la acción de esta fuerza surge una fuerza que se opone al cambio de movimiento y está es la fuerza de fricción $\vec{F}_r$.

Las fuerzas las hemos representado en el ejemplo anterior mediante vectores ya que es una magnitud física vectorial, tienen módulo, dirección y sentido. El módulo no es más que la magnitud de la interacción, la dirección es la línea a lo largo de la cual se ejerce la fuerza y sentido es el lado de la línea hacia el cual se ejerce la fuerza con respecto a un eje escogido para los movimientos rectilíneos.

Es decir, analicemos la figura 3.8, dos fuerzas pueden ser aplicadas en la misma dirección pero en sentidos contrarios (A). También pueden ser aplicadas en la misma dirección y mismo sentido (B). O también pueden ser aplicadas en diferentes direcciones (C), sin embargo, tenemos dos alternativas para medir el ángulo entre las dos direcciones y se escoge uno de acuerdo a una convención.

La unidad en el SI para la fuerza surge a partir de que si interaccionamos con un cuerpo de 1,0 kg de masa provocamos una aceleración de 1,0 m/s^2, diremos que le aplicamos una fuerza de 1,0 Newton, o lo que es lo mismo, en expresión matemática a partir de las unidades básicas: N.m/s^2.

3.1. Fuerzas actuando sobre objetos

Todas las fuerzas que actúen sobre un cuerpo pueden representarse sobre un sistema de ejes de coordenadas. Suele denominarse diagrama del cuerpo libre al eje de coordenadas donde están «***representadas con flechas***» todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo (sin ser necesario dibujar al cuerpo), solo es

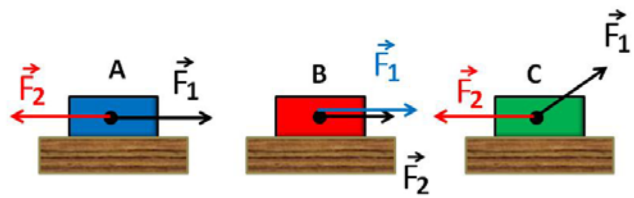


Figura 3.8: Dirección y sentido de una fuerza.

Figura 3.9: Identifica las fuerzas que actúan sobre un objeto.

necesario que identificamos el cuerpos como un punto.

Si colocamos un objeto sobre una superficie horizontal tal como te mostramos en la figura 3.9.

¿Qué fuerzas actúan sobre el objeto colocado sobre la superficie horizontal en la figura 3.9?

Para resolver situaciones que impliquen fuerzas, es necesario que sepas identificar las fuerzas que actúan sobre los cuerpos. Para comenzar con el estudio de la identificación de fuerzas vamos realizar una corta actividad muy dinámica y divertida que de seguro será de tu agrado. En dicha actividad encontrarás algunas similitudes entre la Física y la vida cotidiana.

Imagina que dos estudiantes son elegidos por el profesor o profesora para realizar la siguiente actividad. Los estudiantes los llamaremos estudiante 1

Figura 3.10: Identifica las fuerzas que actúan sobre la mesa.

(«$\vec{F}_1$») y estudiante 2 («$\vec{F}_2$»). Ellos deberán levantar una mesa y tirar de está, en las direcciones mostradas en la siguiente figura 3.10.

¿Cuántas fuerzas están actuando sobre la mesa? Describe como identificaste las fuerzas que actúan sobre la mesa (figura 3.10).

¿Qué fuerzas identificaste? Señálalas en los espacios en blanco a continuación (figura 3.10).

A la hora de resolver un problema de Dinámica, lo primero que hemos de hacer es ver cuales son las fuerzas que actúan sobre cada uno de los cuerpos que aparezcan en el problema. Una vez hecho esto, representar el Diagrama de cuerpo libre para cada uno de ellos. Esto no es más que representar para cada cuerpo por separado las fuerzas que actúan sobre él. Por ejemplo, el diagrama de fuerzas para el caso de la mesa sostenida en el aire por dos estudiantes es mostrado en la figura 3.11.

Llamemos «$\vec{F}_1$» a la fuerza que aplica el estudiante 1, a la fuerza que aplica el estudiante 2, la llamamos «$\vec{F}_2$» y «$\vec{P}$» al peso de la mesa.

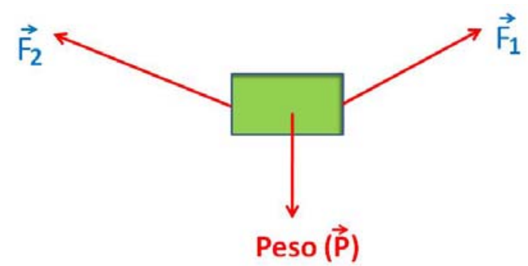


Figura 3.11: Diagrama de las fuerzas que actúan sobre la mesa suspendida en el aire.

Representar las fuerzas que actúan sobre un objeto consiste en conocer y dibujar la posición de las flechas que las simbolizan. Para dibujar una flecha sobre un objeto es suficiente si conocemos los puntos inicial (origen) y final. El punto de aplicación (origen) lo tomaremos en el centro del cuerpo sobre el que actúa.

3.1.1. La fuerza de contacto entre dos superficies

Las fuerzas de contacto entre las superficies planas de dos objetos sólidos son la base de dos fuerzas muy conocidas en la dinámica: la fuerza de fricción y la fuerza normal. Por ello, te presentamos el mapa conceptual a continuación con información básica sobre el origen de estas dos fuerzas (figura 3.12).

3.1.2. Identificación de la fuerza normal

Si se coloca una regla sobre dos libros, de modo que sean los extremos de la regla los que estén en contacto con los libros y el centro esté libre, y luego se ubica un pequeño y pesado objeto en el centro de la regla, ésta se curvará. Si se retira el objeto repentinamente, se podrá observar que la regla volverá a su estado original.

¿Sabes por qué ocurre esto?

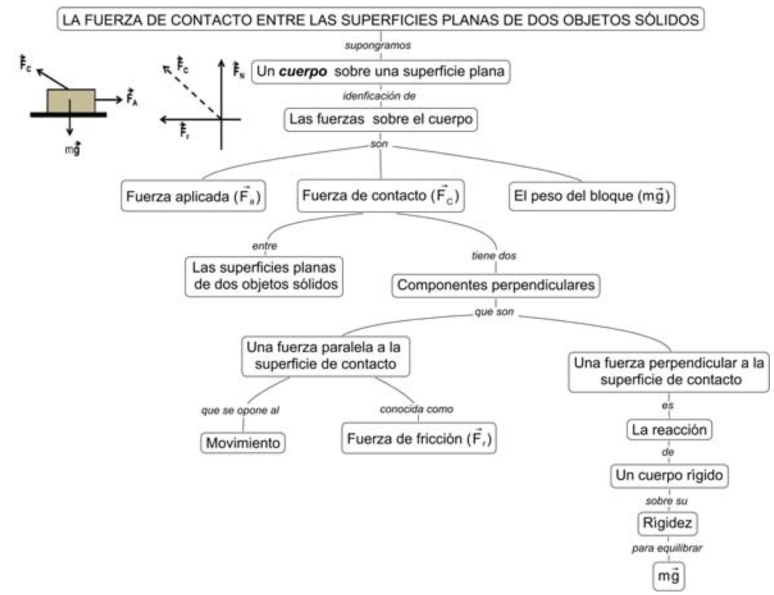


Figura 3.12: Fuerza de contacto entre las superficies planas de dos cuerpos en contacto.

Figura 3.13: Identifica las fuerzas que actúan sobre la mesa.

En la figura 3.10, identificamos las fuerzas que actúan sobre un cuerpo que no está en contacto con ninguna superficie. Cambiemos un poco la situación. Imagina que ahora, la mesa se encuentra en contacto con el piso (figura 3.13):

¿Ocurrirá algún cambio en el diagrama de fuerzas? ¿Por qué?

¿Qué fuerzas identificaste?

¿Existe alguna diferencia entre el nuevo diagrama (figura 3.13) y el anterior (figura 3.10)?

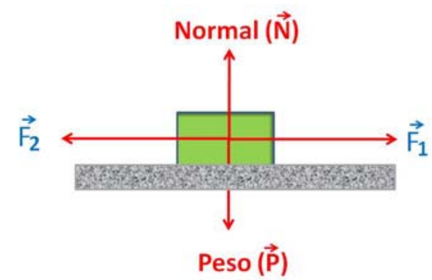


Figura 3.14: Diagrama de las fuerzas que actúan sobre la mesa cuando esta sobre la Tierra (piso).

Como hemos visto en la actividad que realizamos, hay diferentes fuerzas que actúan sobre un cuerpo, unas que podemos identificar fácilmente y o tras que no son tan evidentes, como es el caso de la fuerza normal.

El diagrama de fuerzas para el último caso es el mostrado en la figura 3.14:

Si dos cuerpos están en contacto, y están en reposo relativo uno con respecto al otro, la fuerza resultante, de uno con respecto al otro como sistema de referencia es cero. La mesa está sobre la Tierra (piso) y la mesa está en reposo con respecto a la Tierra, que es nuestro sistema de referencia, la suma de las fuerzas sobre la mesa es cero. Sin embargo, la Tierra ejerce sobre la mesa la Gravedad o peso, por lo tanto sobre la mesa debe haber una fuerza que anule la gravedad. Esta fuerza debido al contacto rígido entre la «Tierra» y la mesa se llama Fuerza Normal «$\vec{N}$» y es siempre perpendicular a la superficie de contacto.

Con la finalidad de que analices un poco más la fuerza Normal te presentamo el mapa de la figura 3.15

3.1.3. Identificación de la fuerza de Fricción

¿Has escuchado hablar de la fuerza de fricción? Explica tu respuesta.

¿Qué sabes de ella? Explica tu respuesta.

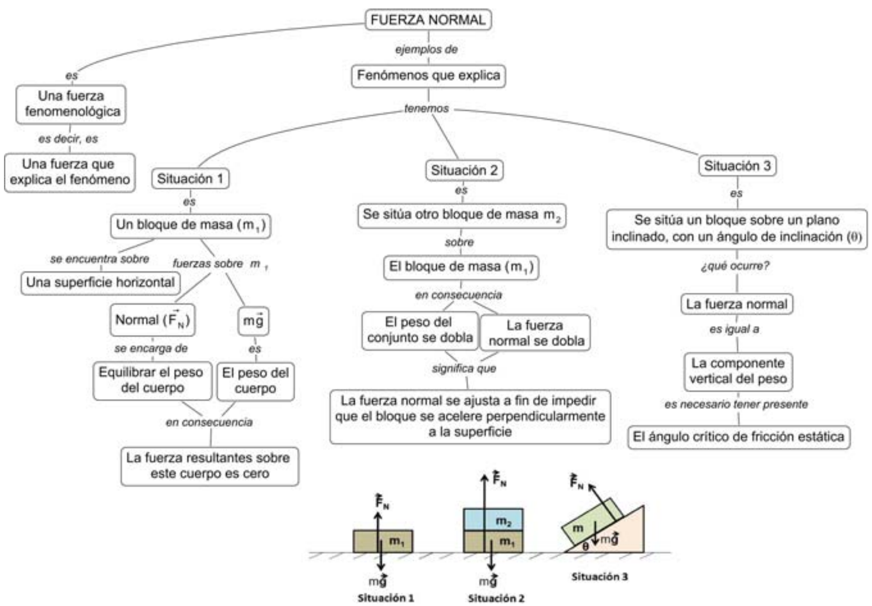


Figura 3.15: La fuerza normal.

La fuerza de fricción es muy importante en nuestra vida por muchos aspectos; el aceite de motor de un auto minimiza la fricción entre piezas movibles, pero sin fricción entre las ruedas y el camino el auto no podrá avanzar ni girar correctamente, como ocurre cuando la superficie de la calle está mojada y la fricción es menor. Sin fricción no podríamos andar fácilmente en bicicleta, ni siquiera caminar correctamente como es el caso cuando la superficie de la acera está llena de aceite.

Cuando hacemos deslizar un libro sobre el piso, vemos que este se detiene después de un tiempo.

¿Por qué se detiene el libro?

¿Quién (o cuál o qué) es la (el) causante de que el libro se detenga?

Si aplicamos una fuerza horizontal «$\vec{F}$» a un bloque sobre una mesa horizontal, como se muestra en la figura 3.16, hacia la derecha, el bloque permanecerá en estado de reposo si la fuerza no es lo suficientemente grande. La fuerza que se contrapone a «$\vec{F}$» y evita que el bloque cambie su estado de reposo a movimiento con cierta velocidad distinta de cero recibe el nombre de fuerza de fricción o fuerza de rozamiento estática.

Se suele definir la fricción estática como una fuerza que actúa sobre un cuerpo la cual impide el deslizamiento de éste respecto a otro o con la superficie con la cual esté en contacto. Esta fuerza es siempre tangencial a la superficie en los puntos de contacto con el cuerpo, y tiene sentido tal que se opone a la fuerza externa aplicada. Por otra parte estas fuerzas de fricción están limitadas en magnitud y no impedirán el cambio de movimiento si se aplican fuerzas externas lo suficientemente grandes.

La fuerza de fricción o de rozamiento estática entre dos cuerpos no depende necesariamente del área de la superficie de contacto entre los dos cuerpos, pero

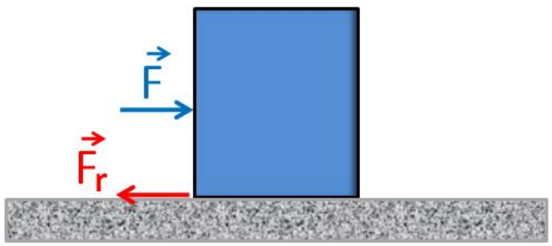


Figura 3.16: La fuerza de fricción se opone al movimiento.

sí es muy sensible a la naturaleza de esa superficie de contacto, es decir, del pulimento de la superficie y del tipo de material que la forme. Esta fuerza es difícil de modelizar con una igualdad matemática por lo que se le expresa mediante una desigualdad: $0 \leq \vec{F}_{est} \leq \mu_{est} N$. Esta fuerza no existe cuando no hay una fuerza neta externa aplicada al objeto.

Hay otra fuerza de fricción que aparece denominada fuerza de fricción cinética, cuyas características son similares a la de la fricción estática pero la cual si se puede modelizar mediante una igualdad matemática: la magnitud de la fuerza de rozamiento cinético entre dos cuerpos en contacto es proporcional a la $\vec{F}_c = \mu_c N$ normal entre los dos cuerpos, donde μ_c es el coeficiente de rozamiento cinético. Este rozamiento no existe cuando no hay movimiento relativo entre los dos cuerpos que están en contacto. Por ejemplo, si queremos empujar un armario muy grande y aplicamos una fuerza pequeña, el armario no cambiará su estado de reposo. Esto es debido a la fuerza de rozamiento estática que se opone al cambio de movimiento. Si aumentamos la fuerza con la que empujamos, llegará un momento en que superamos esta fuerza de rozamiento y será entonces cuando el armario cambie su estado de reposo y pasa a estado de movimiento con velocidad distinta de cero. Una vez que el cuerpo empieza a moverse, hablamos de fuerza de rozamiento cinética. Normalmente, esta fuerza de rozamiento cinético es menor que la fuerza de rozamiento estática, podemos así establecer que hay dos coeficientes de rozamiento: el estático (μ_{est}), y el cinético (μ_c), siendo el primero mayor que el segundo: $\mu_{est} > \mu_c$.

Por último, y con la finalidad de que reflexiones sobre la fuerza de fricción (cinética, estática y ángulo crítico), te presentamos los mapas a continuación (figura 3.17; 3.18 y 3.19).

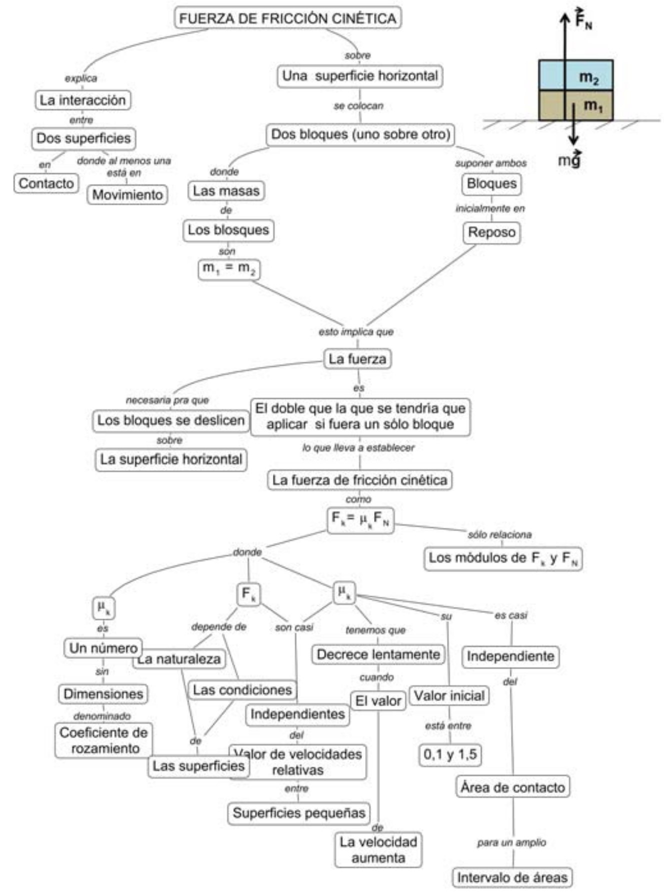


Figura 3.17: La fuerza de fricción cinetica.

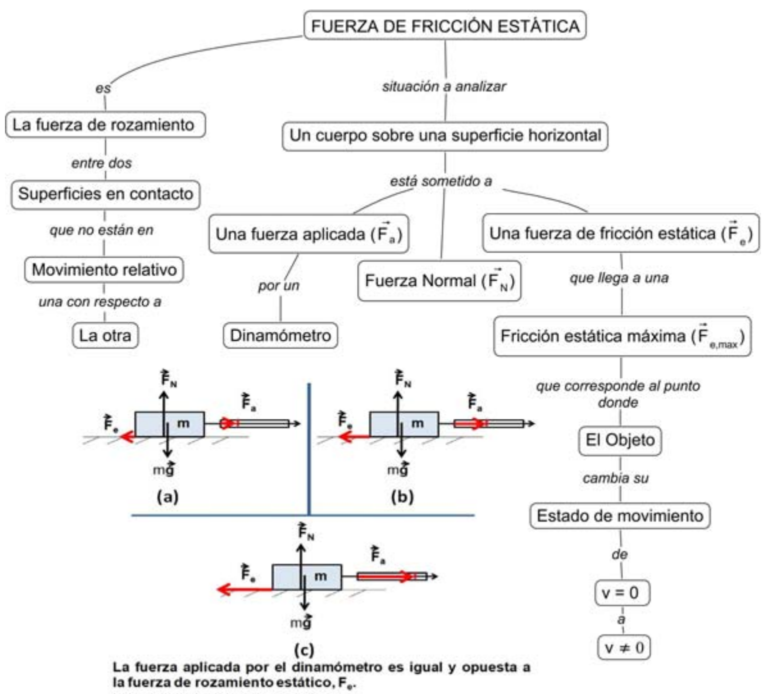


Figura 3.18: La fuerza de fricción estática.

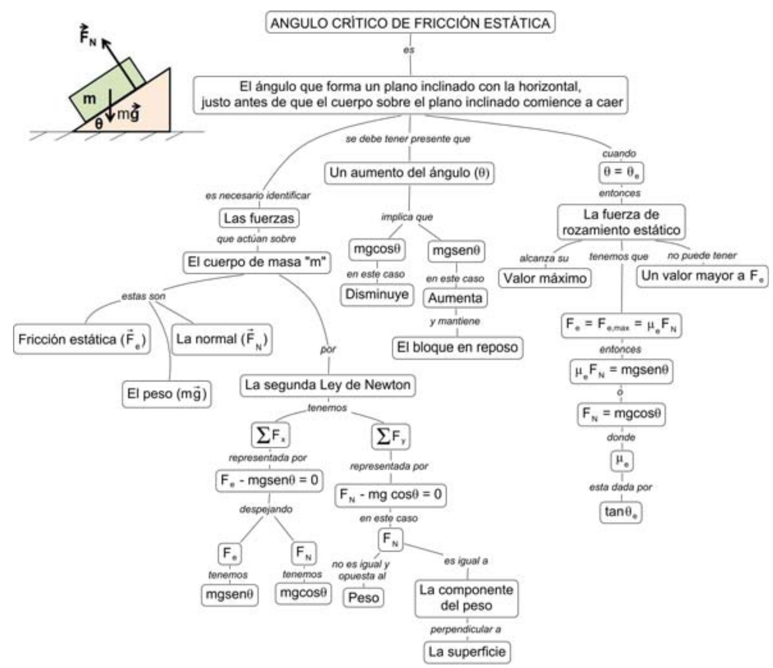


Figura 3.19: Ángulo crítico.

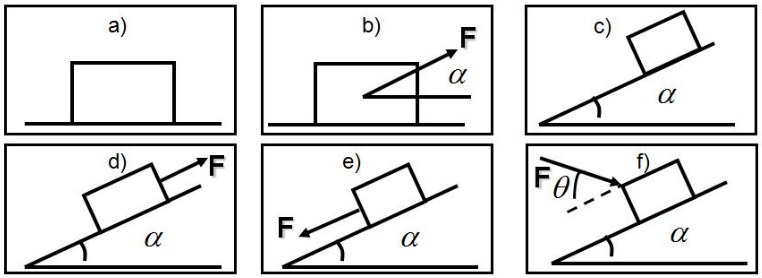


Figura 3.20: Identificar las fuerzas que actúan sobre los cuerpos.

3.1.4. Actividad 3.1

Identificar las fuerzas que actúan sobre las cuerpos mostrados en la figura 3.20.

3.2. Leyes del Movimiento o Leyes de Newton

Sir Isaac Newton fue el primero en enunciar las leyes del movimiento; las publicó en 1687 en su «***Philosophiae Naturales Principia Matemática***» (Principios Matemáticos de la Filosofía Natural). Las leyes de Newton son sencillas de expresar, pero muchos estudiantes la encuentran difíciles de comprender y manejar; la razón es que antes de estudiar Física, usted ha pasado años caminando, lanzando pelotas, empujando objetos y realizando muchas actividades que requieren cambios de movimiento. Al hacerlo han desarrollado ciertas ideas de sentido común respecto a los movimientos. Como es común desde los albores de la humanidad, el hombre considera el mundo como causal, es decir que a toda causa corresponde un efecto, y los sucesos están ordenados en el tiempo, de manera tal que toda causa precede al efecto. Entonces, los cambios de movimiento deben tener causas. Una gran parte de esta sección trata de ayudarle a reconocer cuándo las ideas de sentido común deben sustituirse por otro tipo de ideas producto de un análisis.

Supongamos que tenemos un libro sobre el escritorio. Evidentemente, el libro permaneceré en estado de reposo si no hay ninguna fuerza externa que influya sobre él. Imagine ahora que usted empuja el libro con una fuerza horizontal lo suficientemente grande para vencer la fuerza de fricción estática entre la mesa y el libro. En este caso el libro podría ponerse en movimiento con velocidad constante si la fuerza que actúa sobre él es de igual magnitud que la fuerza de fricción cinética. Si la fuerza aplicada es mayor que la fuerza de fricción cinética, el libro se acelera. Si usted deja de empujar el libro, éste se detiene después de

haber recorrido una corta distancia debido a que la fuerza de fricción desacelera su movimiento.

Imagina, después de esto, que empuja el libro a lo largo de un piso muy encerado. En este caso el libro también llega a su estado de reposo después de que usted deje de empujarlo, aunque no tan rápido como antes. Imagine ahora un piso pulido a tal grado que no hay fricción; en este caso:

¿Qué pasará con el libro?

¿Hay alguna diferencia en el movimiento cuando había fricción y cuando no lo hay? de haberla ¿Cuál es?

Se presentarán ejemplos de las respuestas a todo el salón de clases y se concluirá. ¿Es posible tener movimiento sin que haya una fuerza?

En la vida cotidiana el hombre necesita aplicar fuerzas en distintos momentos a distintos objetos. Se aplican fuerzas que generan cambios de movimientos en objetos, por ejemplo, al jugar billar o bolos, al conducir un automóvil, al conducir una bicicleta, etc. Como ya sabemos las fuerzas al actuar sobre un cuerpo produce en el mismo un cambio en el estado de movimiento del cuerpo, o lo que es lo mismo, dicha fuerza produjo una respuesta en el sistema dentro del cual actuó. El hombre ya ha estudiado y analizado dichas respuestas a través de las Leyes de Newton. En el mundo de hoy, donde los avances tecnológicos están a la orden del día el estudio de las respuestas de los sistemas a la aplicación de fuerza no es algo extraño y tampoco lo son las leyes de Newton.

Muchos científicos anteriores a Newton contribuyeron a los cimientos de la Mecánica, incluidos Copérnico, Brahe, Kepler y sobre todo Galileo Galilei, quien murió en el año en que nació Newton. Newton dijo: «***Si he podido ver un poco más lejos que otros hombres, es porque me he sostenido en los hombros de gigantes.***» Ahora les toca a ustedes sostenerse en los hombros de Newton y utilizar sus leyes para comprender como funciona la naturaleza.

3.2.1. Primera ley de Newton

Cuando vas dentro de un automóvil y este frena repentinamente: ¿Qué pasa con tu cuerpo?

¿Por qué pasa esto?

La primera Ley de Newton establece que en los sistemas inerciales (Figura 3.21): «***Un objeto en estado de reposo permanecerá en estado de reposo y un objeto en movimiento continuará en movimiento con velocidad constante y en línea recta a menos que experimente una fuerza externa neta***».

En otras palabras, podemos decir que en los sistemas inerciales cuando una fuerza neta sobre un cuerpo es cero, su aceleración es cero. Es decir, $\sum \vec{F} = 0$, entonces $\vec{a} = 0$. Por último, te presentamos más información sobre la primera ley de Newton en el mapa conceptual de la Figura 3.22.

3.2.2. Segunda ley de Newton

Antes del siglo XVII todo el mundo pensaba que para mantener un objeto en movimiento a velocidad constante hacía falta una fuerza constante.

¿Qué opinas?

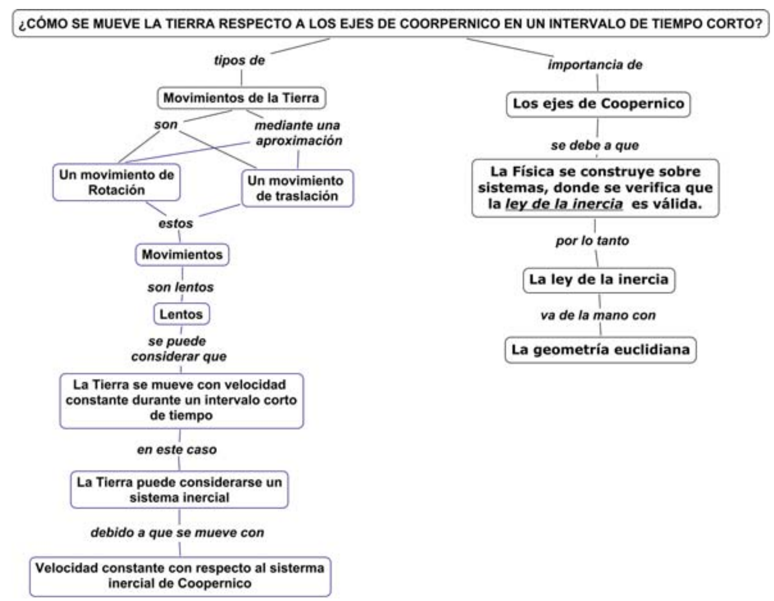


Figura 3.21: Los ejes de coopernico.

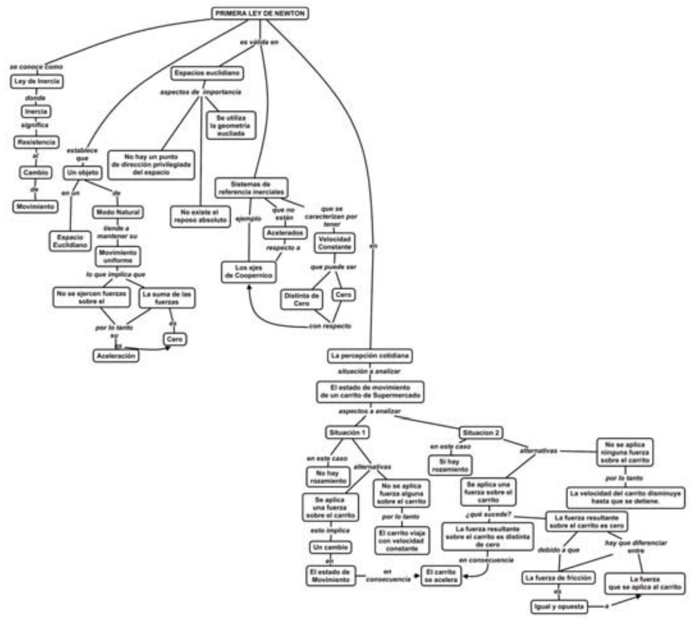


Figura 3.22: Primera ley de Newton.

Figura 3.23: Diagrama de uno de los experimentos de Galileo sobre un plano inclinado.

Figura 3.24: Diagrama de uno de los experimentos de Galileo sobre un plano inclinado.

¿Qué pasa cuando dejas de empujar un carrito de juguete, por ejemplo? Se para, ¿Sí se para, no es cierto? La experiencia cotidiana, al parecer, confirma la creencia.

A principios del siglo XVII Galileo Galilei se puso a hacer experimentos con objetos y planos inclinados. Soltó una pelota por un plano inclinado desde cierta altura (figura 3.23). La pelota bajó y luego subió por otro plano inclinado. Usando bolas y planos muy lisos Galileo observó que las pelotas subían casi hasta el mismo nivel del que habían partido (figura 3.24).

Observe que se dijo «***Casi***», pero no exactamente. ¿Por qué Galileo se dijo que el intervalo que les faltaba para llegar hasta el mismo nivel se debía a que algo perdía la pelota en su camino debido a la fricción? Pero si pudiera eliminarse la fricción completamente, ¿qué pasaría? Galileo pensaba que sin fricción las pelotas llegarían exactamente hasta la misma altura de la que partieron.

Figura 3.25: Diagrama de uno de los experimentos de Galileo sobre un plano inclinado.

Luego Galileo se preguntó (figura 3.25): ¿y si el segundo plano no está inclinado en absoluto? ¿Hasta dónde llega la pelota?

Galileo concluyó que, cuando se elimina la fuerza de fricción que hace perder impulso, los objetos en movimiento siguen en movimiento sin necesidad de fuerza.

Aplicar una fuerza a un objeto produce una aceleración (un aumento o disminución de la velocidad o un cambio de la dirección o del sentido de la velocidad). A mayor fuerza en el sentido del movimiento, mayor aceleración. Pero al mismo tiempo a mayor masa, menor aceleración. Isaac Newton encontró la relación exacta entre intensidad de la fuerza, masa y aceleración, para la traslación:

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{3.1}$$

Clásicamente se ha planteado la existencia de una ley, llamada Tercera Ley de Newton. Esta ley presupone que una fuerza que actúa sobre un cuerpo siempre es el resultado de su interacción con otro cuerpo, así que para que haya fuerzas, en Física clásica, se necesita dos entes que interaccionan. Al analizar lo que ocurre, uno siempre está obligado a suponer que uno de los entes es de prueba y el otro genera las causas. Sin embargo, hay que cambiar de punto de vista y analizar el caso en que el que fue de prueba pasa a ser el generador de las causas y el otro el ente de prueba. Eso significa que debe haber un principio de equivalencia. Este principio de equivalencia se le llama clásicamente III ley de Newton o Ley de la acción y reacción. Por ejemplo, si estamos sobre la Tierra, como en efecto lo estamos, sentimos que la Tierra atrae un objeto (por ejemplo una piedra esférica de 30 km de radio) que dejamos libre a cierta altura. Sin embargo, si estamos sobre la piedra (somos muy pequeños con respecto a la piedra y estamos fijos a ella), vemos que la Tierra se nos viene encima. En el primer caso es la Tierra la que genera la fuerza que se ejerce sobre la piedra. En el segundo caso es la piedra que ejerce una fuerza sobre la Tierra. En cada caso la fuerza que se ejerce sobre el cuerpo considerado de prueba tiene sentido contrario a la del cuerpo considerado como generador de la fuerza. Los experimentos muestran que, al interaccionar dos cuerpos, las dos fuerzas que ejercen mutuamente son de igual

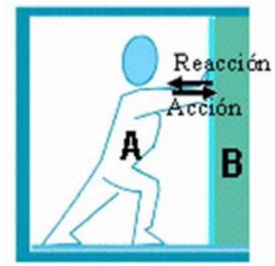


Figura 3.26: Tercera ley de Newton.

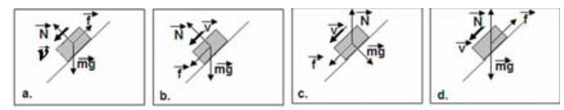


Figura 3.27: Item 3.2.1

magnitud y en sentido contrario (figura 3.26). Esta es la tercera ley de Newton.

«***Si un cuerpo A ejerce una fuerza sobre un cuerpo B, entonces el cuerpo B ejerce una fuerza sobre el cuerpo A. Estas fuerzas tienen igual magnitud pero sentido opuesto y actúan sobre cuerpos distintos.***»

3.2.3. Actividad 3.2

1. Sobre un piso horizontal hay un plano inclinado y una masa m desciende sobre el plano inclinado a velocidad constante ¿Cuál de los diagramas de fuerza corresponde a las fuerzas que actúan sobre el cuerpo? (figura 3.27)

2. Si el ángulo del plano inclinado con la horizontal es θ, la sumatoria de las fuerzas en la dirección del plano inclinado, que actúan sobre el cuerpo de la figura 3.27 es igual a:

   a) $\vec{v}$

   b) $-\mathrm{mgsensen}\,\theta + \mathrm{f} = 0$

   c) $-mgcos\theta + f = 0$

   d) $-mgsen\theta + f \neq 0$

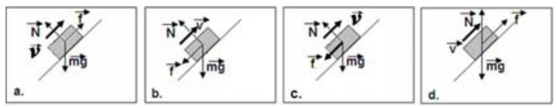


Figura 3.28: Elige la mejor opción.

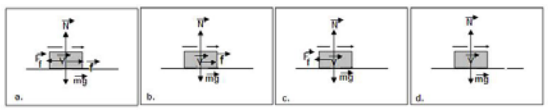


Figura 3.29: Elige la mejor opción.

3. El mismo cuerpo anterior es lanzado con una velocidad inicial que lo hace subir por el plano inclinado de modo que cada vez tiene menor rapidez. El diagrama de fuerzas que corresponde es (figura 3.28):

4. Si el ángulo del plano inclinado con la horizontal es θ, la sumatoria de las fuerzas R en la dirección del plano inclinado que actúan sobre el cuerpo de la figura 3.28 es igual a:

   a) $\vec{v}$
   b) $-mgsen\theta - f \neq 0$
   c) $mgcos\theta + f \neq 0$
   d) $mgsen\theta - f \neq 0$

5. Un bloque de masa m se mueve en líea recta sobre una superficie horizontal, con velocidad constate (figura 3.29). ¿Cuál diagrama de fuerzas representa mejor la situación, donde $\vec{f}$ es la fuerza aplicada y $\vec{F}_f$ la fuerza de fricción cinética?

4

Respuestas de las Actividades

ACTIVIDAD 1.1

1. 2,8 cm; dos cifras significativas; el dos es la cifra segura; el ocho es la cifra dudosa.
2. 5,85 mm; tres cifras significativas; el cinco y el ocho son cifras seguras; el cinco es la cifra dudosa.
3. 4,4 cm; dos cifras significativas; el cuatro es la cifra segura; el otro cuatro es cifra dudosa.
4. 8,15 mm; tres cifras significativas; el ocho y el uno son cifras seguras; el cinco es la cifra dudosa.
5. 9,45 mm; tres cifras significativas; el nueve y el cuatro son cifras seguras; el cinco es la cifra dudosa.

ACTIVIDAD 1.2

$<x> = 3,9\ mm; \sigma\ =\ 0,2\ mm; entre\ 3,7\ y\ 4,1; (3,9 \pm 0,2)\ mm.$

ACTIVIDAD 1.3

$A = (58,0\ \pm\ 0,7)\ cm^2$

Números (cm)	El entero de posición más alta	Posición en potencia de 10
0,030 050	3	10^{-2}
12,0	1	10^{1}
345,35	3	10^{2}
0,000 067 8 0	6	10^{-5}
732 004,35	7	10^{5}
0,000 404 5	4	10^{-4}
2,45	2	10^{0}
15,25	1	10^{1}
0,000 55	5	10^{-4}
235,340 0	2	10^{2}
1,0	1	10^{0}
Actividad 1.4		

Figura 4.1: Entero con posición más alta.

Número (g)	n	10^{n}	Parte decimal	Notación corriente	Notación Científica
0,030	−2	10^{-2}	3,0	3×10^{-2}	$3,0 \times 10^{-2}$
0,002 35	−3	10^{-3}	2,35	2×10^{-3}	$2,35 \times 10^{-3}$
0,000 435	−4	10^{-4}	4,35	4×10^{-4}	$4,35 \times 10^{-4}$
0,000 000 325	−7	10^{-7}	3,25	3×10^{-7}	$3,25 \times 10^{-7}$
0,012	−2	10^{-2}	1,2	1×10^{-2}	$1,2 \times 10^{-2}$
0,000 065	−5	10^{-5}	6,5	6×10^{-5}	$6,5 \times 10^{-5}$
0,001 0	−3	10^{-3}	1,0	1×10^{-3}	$1,0 \times 10^{-3}$
0,043 5	−2	10^{-2}	4,35	4×10^{-2}	$4,35 \times 10^{-2}$
0,003 25	−3	10^{-3}	3,25	3×10^{-3}	$3,25 \times 10^{-3}$
0,456	−1	10^{-1}	4,56	4×10^{-1}	$4,56 \times 10^{-1}$

Cuadro 4.1: Tabla 4: Actividad 1.4

Número (cm)	n	10^{n}	Parte decimal	Notación corriente	Notación Científica
2,235	0	10^{0}	2,235	2×10^{0}	$2,235 \times 10^{0}$
7,85	0	10^{0}	7,85	7×10^{0}	$7,85 \times 10^{0}$
1,15	0	10^{0}	1,15	1×10^{0}	$1,15 \times 10^{0}$
4,35	0	10^{0}	4,35	4×10^{0}	$4,35 \times 10^{0}$
5,123 25	0	10^{0}	5,123 25	5×10^{0}	$5,123\ 25 \times 10^{0}$
3,290	0	10^{0}	3,290	3×10^{0}	$3,290 \times 10^{0}$
9,500	0	10^{0}	9,500	9×10^{0}	$9,500 \times 10^{0}$
8,235	0	10^{0}	8,235	8×10^{0}	$8,235 \times 10^{0}$
9,255	0	10^{0}	9,255	9×10^{0}	$9,255 \times 10^{0}$
6,235	0	10^{0}	6,235	6×10^{0}	$6,235 \times 10^{0}$

Cuadro 4.2: Tabla 5: Actividad 1.5

Número (m)	n	10^{n}	Parte decimal	Notación corriente	Notación Científica
12,235	1	10^{1}	1,223 5	1×10^{1}	$1,223\ 5 \times 10^{1}$
700,85	2	10^{2}	7,008 5	7×10^{2}	$7,008\ 5 \times 10^{2}$
100,15	2	10^{2}	1,001 5	1×10^{2}	$1,001\ 5 \times 10^{2}$
4 000,35	3	10^{3}	4,000 35	4×10^{3}	$4,000\ 35 \times 10^{3}$
50 000,125	4	10^{4}	5,000 012 5	5×10^{4}	$5,000\ 012\ 5 \times 10^{4}$
30,25	1	10^{1}	3,025	3×10^{1}	$3,025 \times 10^{1}$
900,5	2	10^{2}	9,005	9×10^{2}	$9,005 \times 10^{2}$
80,25	1	10^{1}	8,025	8×10^{1}	$8,025 \times 10^{1}$
9 000,25	3	10^{3}	9,000 25	9×10^{3}	$9,000\ 25 \times 10^{3}$
60,25	1	10^{1}	6,025	6×10^{1}	$6,025 \times 10^{1}$

Cuadro 4.3: Tabla 6: Actividad 1.6

Número	Movimiento de la coma	Posiciones que se mueve la coma	Notacion decimal
$2,25 \times 10^{-2}$	izquierda	dos	0,022 5
$6,35 \times 10^{4}$	derecha	cuatro	63 500
$4,15 \times 10^{5}$	derecha	cinco	415 000
$5,35 \times 10^{-5}$	izquierda	cinco	0,000 053 5
$7,45 \times 10^{-4}$	izquierda	cuatro	0,000 745
$9,65 \times 10^{-3}$	izquierda	tres	0,009 65
$8,75 \times 10^{-1}$	izquierda	uno	0,875
$6,65 \times 10^{3}$	derecha	tres	6 650
$9,65 \times 10^{7}$	derecha	siete	96 500 000
$8,15 \times 10^{4}$	derecha	cuatro	81 500

Cuadro 4.4: Tabla 7: Actividad 1.7

Número (g)	Número escrito correctamente en notación científica
200,250567 x 10^{-2}	2,002 505 67 x 10^{0}
0,35678 x 10^{4}	3,567 8 x 10^{3}
40,15 x 10^{5}	4,015 x 10^{6}
0,00355 x 10^{-5}	3,55 x 10^{-8}
701,45 x 10^{-4}	7,014 5 x 10^{-2}
90,65 x 10^{-3}	9,065 x 10^{-2}
0,705 x 10^{-1}	7,05 x 10^{-2}
12,65 x 10^{3}	1,265 x 10^{4}
934567,65 x 10^{7}	9,345 676 5 x 10^{12}
8004,15000 x 10^{4}	8,004 150 00 x 10^{7}

Cuadro 4.5: Tabla 8: Actividad 1.8

ACTIVIDAD 1.9

1. 6,53 x 10^4 cm
2. 1,67 x 10^{-1} cm
3. 3,67 x 10^{-1} cm
4. 2,18 x 10^5 cm
5. 4,39 x 10^6 cm

ACTIVIDAD 1.10

1. 1,9 x 10^2
2. 3,36 x 10^{11}
3. 1,4 x 10^8 cm^2
4. 7,0 x 10^2
5. 2,6 x 10^{15} cm^2
6. 3,4 x 10^0 cm^2

ACTIVIDAD 1.11

1. Pasar de Notación Decimal a notación Científica
   - *a*) 1,235 0 x 10^2 m
   - *b*) 2,345 x 10^1 cm
   - *c*) 5,109 50 x 10^3 g
   - *d*) 4,812 055 534 5 x 10^4 g
   - *e*) 5,50 x 10^0 km
   - *f*) 4,563 45 10^{-1} g
   - *g*) 6,75 x 10^{-4} g
   - *h*) 4,5 x 10^{-7} gg
   - *i*) 5,05 x 10^{-1} g
   - *j*) 4,675 x 10^{-3} g
2. Pasar de notación científica a notación decimal
   - *a*) 23 554 65 m
   - *b*) 0,001 251 0 cm
   - *c*) 5,35 g
   - *d*) 6 055 235 g
   - *e*) 81,05 km
   - *f*) 915 000 g
   - *g*) 0,000 001 555 000 g
   - *h*) 715,0 g
   - *i*) 4,910 g
   - *j*) 3 150 km
3. Verificar la escritura de los siguientes números escritos en notación científica.
   - *a*) 2,123 5 x 10^6 m
   - *b*) 1,025 x 10^{-2} cm
   - *c*) 5,35 x 10^{-1} g
   - *d*) 6,05 x 10^2 g
   - *e*) 8,131 0 x 10^3 km
   - *f*) 9,150 x 10^7 g
   - *g*) 1,552 500 0 x 10^{-4} g
   - *h*) 7,15 x 10^0 45 g
   - *i*) 4,910 x 10^1 g
   - *j*) 3,152 x 10^6 km

4. Sumar los siguientes números escritos en notación científica.

   a) 2,48 x 10^4 m
   b) 5,35 x 10^0 cm
   c) 6,06 x 10^6 g
   d) 1,6 x 10^{-2} m
   e) 1,62 x 10^6 km

5. Restar los siguientes números escritos en notación científica.

   a) 4,325 x 10^5 m
   b) -6,27 x 10^0 cm
   c) 6,54 x 10^4 g
   d) -1,64 x 10^{-2} m
   e) -7,10 x 10^7 km

6. Multiplicar los siguientes números escritos en notación científica.

   a) 6,0 x 10^7 km^2
   b) 1,54 x 10^{-8} cm^2
   c) 1,08 x 10^{-2} m^2

7. Dividir los siguientes números escritos en notación científica.

   a) 2,325 x 10^4
   b) 2,20 x 10^{-5}
   c) 5,00 x 10^{-5}
   d) 4,0 x 10^3
   e) 1,5 x 10^8

8. El orden de magnitud de las siguientes cantidades:

   a) 10^{22} m
   b) 10^{15} cm
   c) 10^9 g
   d) 10^{26} g
   e) 10^{16} km
   f) 10^{10} g
   g) 10^{16} g
   h) 10^{36} g
   i) 10^{13} g
   j) 10^{10} km

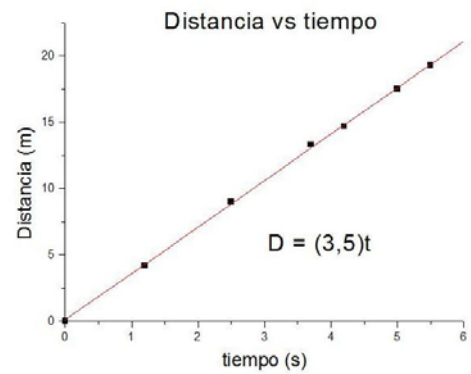


Figura 4.2: Actividad 1.12: Tabla 9

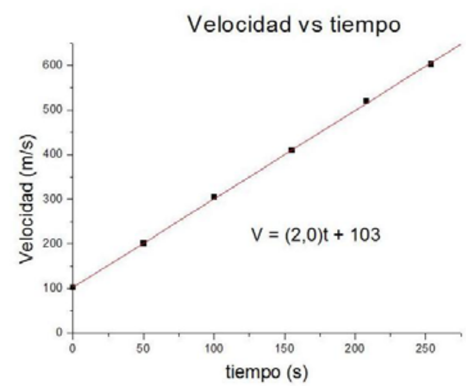


Figura 4.3: Actividad 1.12: Tabla 10

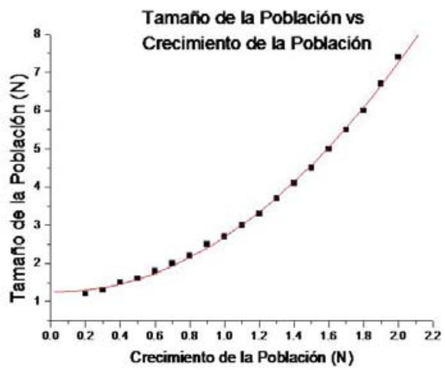


Figura 4.4: Actividad 1.13: Tabla 11: Gráfica en Hoja milímetrada.

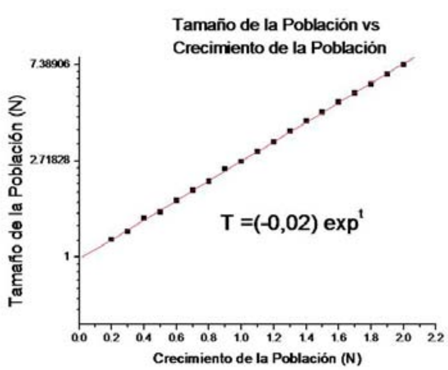


Figura 4.5: Actividad 1.13: Tabla 11: Gráfica en Hoja Semi-logaritmica.

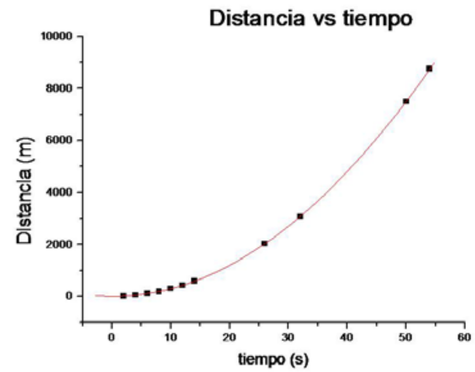


Figura 4.6: Actividad 1.14: Tabla 12: Gráfica en Hoja milímetrada.

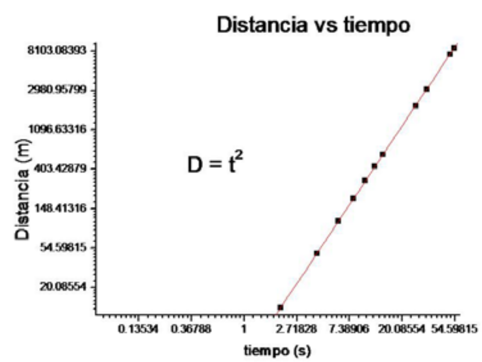


Figura 4.7: Actividad 1.14: Tabla 12: Gráfica en Hoja Doblemente-logaritmica.

ACTIVIDAD 1.19

Situación 1:

$$\vec{R} = 34\ cm,\ 27^{\circ}\ al\ Sur\ del\ Este$$

Situación 2:

$$\vec{R} = 50\ cm,\ al\ Oeste$$

ACTIVIDAD 2.1

1. Las posiciones P_1, P_2 y P_3 son respectivamente:
   a) $P_1 = -\ 2{,}0\ \widehat{x}$ m.
   b) $P_2 = 2{,}0\ \widehat{x}$ m.
   c) $P_3 = 5{,}0\ \widehat{x}$ m.
2. Con respecto al punto 2 tenemos:
   a) Ver figura 4.8
   b) $P_1 = (5{,}0\ \widehat{x} + 12\ \widehat{y})$ m.
   c) $P_2 = (12\ \widehat{x} + 9{,}0\ \widehat{y})$ m.

ACTIVIDAD 2.2

1. $\Delta\vec{r} = (1{,}0\ \text{m} - 4{,}0\ \text{m})\ \widehat{x} = -\ 3{,}0\ \widehat{x}$ m
2. Con respecto al punto 2 tenemos:
   a) Ver figura 4.9.
   b) $r_1 = (2{,}0\ \widehat{x} + 12\ \widehat{y})$ m.
   c) $r_2 = (9{,}0\ \widehat{x} + 4{,}5\ \widehat{y})$ m.
   d) $\Delta\vec{r} = 9{,}6$ m, 51°con respecto al eje x positivo.

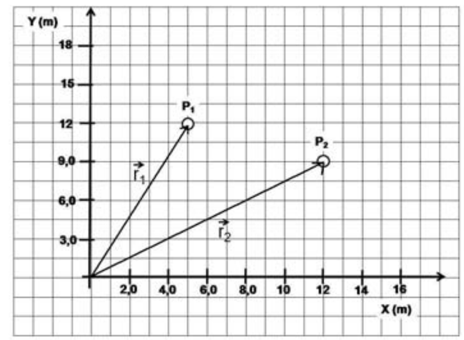


Figura 4.8: Puntos sobre un plano: Actividad 2.1.

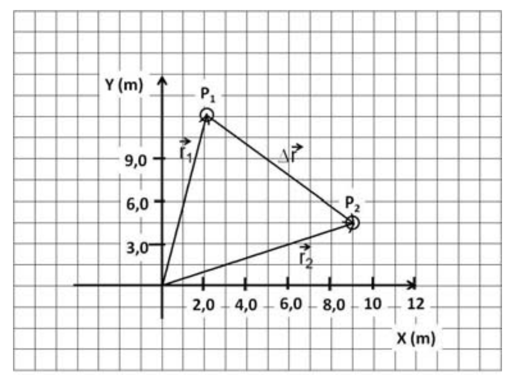


Figura 4.9: Desplazamiento de una particula sobre un plano

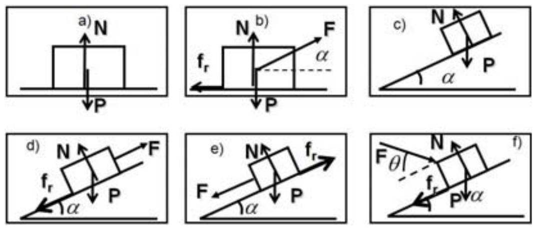


Figura 4.10: Identificando fuerzas sobre cuerpos: Actividad 3.1

ACTIVIDAD 2.4

1,0 m/s

ACTIVIDAD 2.5

1. 2,0 m/s
2. Misma rapidez, distinta velocidad.

5

Referencias Bibliográficas

1. Halliday, D., Resnick, R. y Krane, K. (1996). Física, 4a., edición. Volumen 1. México: CECSA.
2. Gettys, E., Keller, F., Skove, M. (1994). Física Clásica y Moderna. España: Mc Graw Hill.
3. Hewitt, P. (1992). Conceptos de Física. México: Limusa.
4. Serway, R. (1993). Física. Tomo I. México: Mc Graw Hill.
5. Sears, F., Zemansky, M., Young, H. Freedman, R. (2004). Física Universitaria. Décimo primera edición. Traducción del inglés. Pearson Education, México.
6. Recursos para la Enseñanza de la Física en Internet (http://www.aps.org/phys.html).
7. Didáctica de la Física (http://www.moderna2000.com.br/fisicaonline/).
8. Squires, G.L. (1972). Física Práctica. Libros McGraw-Hill de México, S.A. de C.V.
9. Imágenes de Google.